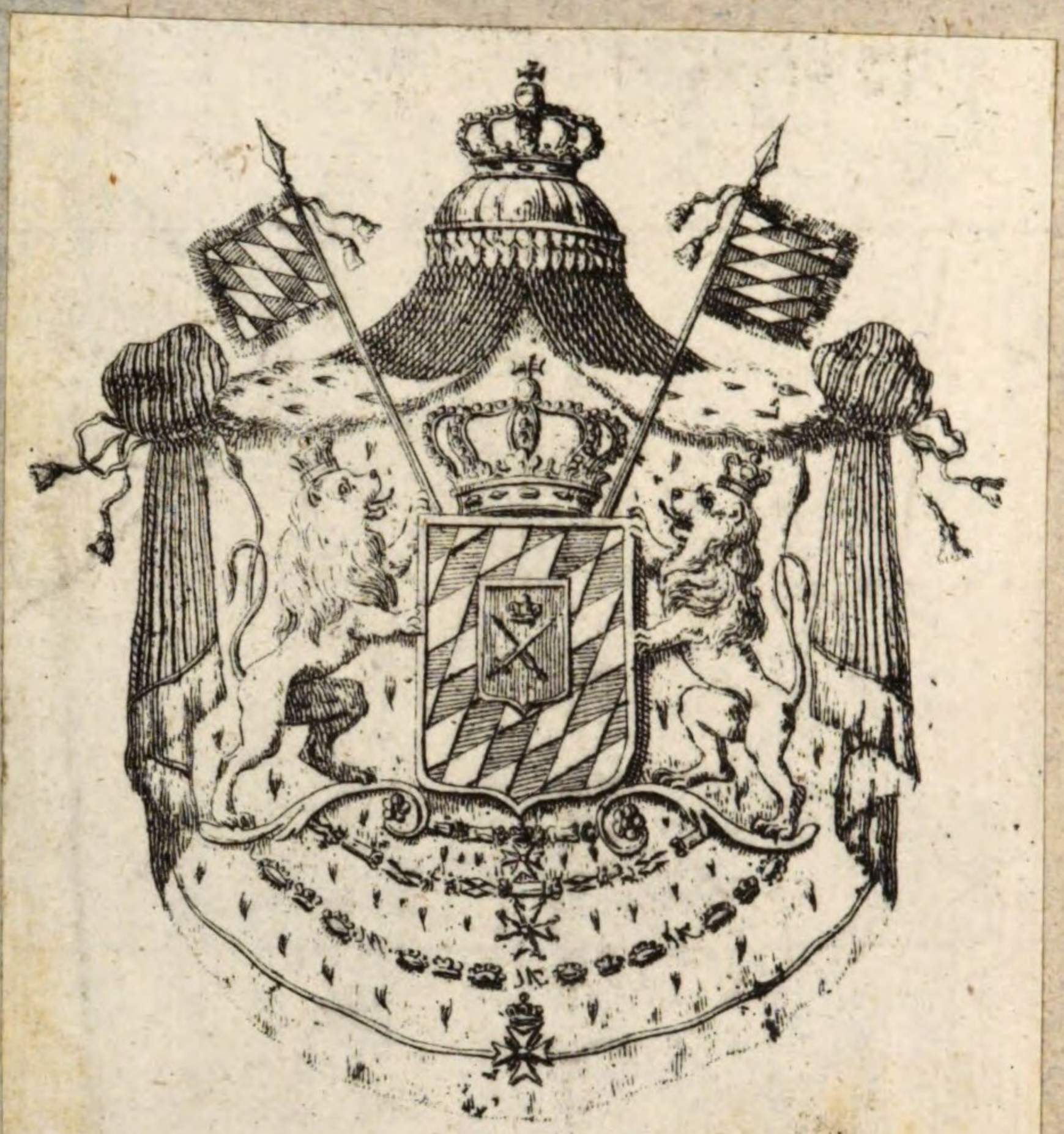
Math. P.
359 m
Abinsinger



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

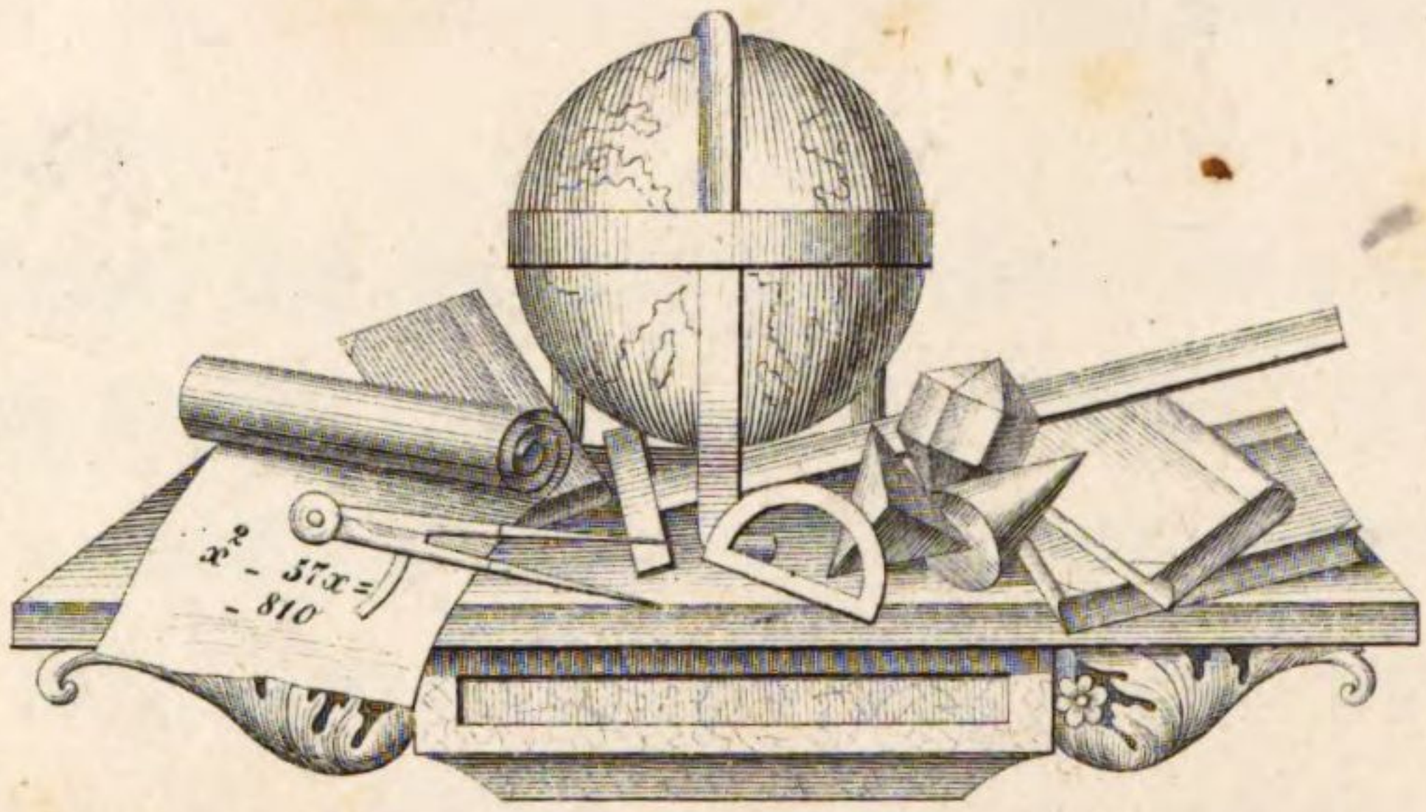
LEHRBUCH

der

Arithmetik und Algebra

von

Prof. Dr Minsinger.



mit einer Logarithmentafel und mehreren metrologischen Tabellen über die Masze, Gewichte u. Münzen verschiedener Länder.

Augsburg 1832.

Verlag der Karl Kollmann'schen, vormals Jos. Wolff'schen Buchhandlung.

W2
169.D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Gegenwärtiges Lehrbuch enthält die Hauptlehren der Arithmetik und Algebra, und zwar in einer solchen Ausdehnung, wie ich es für (höhere) Schulen, so wie zum Selbstunterrichte für passend hielt.

Die Ursache, daß man das ganze Buch nicht in so viele Abschnitte und Capitel (wie sehr häufig der Fall ist) zersplittert findet, wodurch der Zusammenhang der mathematischen Lehren ganz aufgehoben wird, ist, weil ich stets sogleich aus den Hauptsätzen alle nöthigen Folgerungen ableitete, um dadurch die Aufmerksamkeit des Schülers zu fesseln, und ihn an Nachdenken und Selbsterfinden zu gewöhnen. Daher kommt z. B. die große Ausdehnung der Potenzenlehre, in welcher nach dem binomischen Lehrsatze die Proportionslehre, und dieser endlich die Lehre von den Logarithmen zum Beschlusse folgt. Der Gleichförmigkeit wegen, so wie aus Ersparung neuer Unkosten für die Schüler, habe ich eine sehr vollständige und bequeme Logarithmentafel beigefügt. Eben so mag die weite Ausführung der Lehre von den Gleichungen die Wichtigkeit des Gegenstandes entschuldigen.

Auch die Elemente der Combinationslehre, und ihre Anwendung auf Lösung verschiedener leichtern Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung schienen mir eben so nothwendig, als nützlich und angenehm. Die metrologischen Tafeln sind aus den besten neuesten Werken entlehnt, und auf das (natürliche) französische Maßsystem, jedoch mit beigefügter Reductionszahl für die Umwandlung auf die vaterländischen Maße und Gewichte zurückgeführt.

Wie weit mir Deutlichkeit und lichtvolle Ordnung, Reichthum des Inhalts, und Beschränkung auf das Nöthige und Nützliche gelungen sein mag, mögen Sachverständige entscheiden, deren Berichtigungen ich stets mit innigem Danke anerkennen werde.

Minsinger.

Inhalt.

		Seite.
§. 1—3.	Einleitung	1
4.	Von der mathematischen Methode	3
5—8.	Ueber das Entstehen der Zahlen, und die Zahlensysteme .	6
9—13.	Die einfachen ursprünglichen Veränderungsarten der Zahlen	13
14—18.	Entgegengesetzte Größen	21
19.	Die Bezeichnung der Größen durch Buchstaben . .	25
20.	Ueber den Gebrauch der Klammern	27
21—24.	Die vier Rechnungsarten mit allgemeinen Größen .	28
25—31.	Von der Theilbarkeit der Größen	36
32—38.	Von den Brüchen und den Rechnungsarten mit denselben	47
39—41.	Von den Decimalbrüchen	59
42.	Von den Kettenbrüchen	67
43.	Auflösung der Brüche in unendliche Reihen . . .	72
44—57.	Von den Potenzen und Wurzeln a) eintheiliger Größen	75
58.	Von den imaginären Größen	93
59—61.	b) mehrtheiliger Größen: 2te Potenz und Wurzel . .	96
62—64.	3te Potenz und Wurzel	105
65.	Vom binomischen Lehrsatze	110
66—67.	Vom polynomischen Lehrsatze	113
68—70.	Von den Verhältnissen und Proportionen . . .	117
71—72.	Von den arithmetischen Proportionen	120
73.	Von den geometrischen Proportionen	123
74.	Die vorzüglichsten Veränderungen und Verbindungen der geometrischen Proportionen	124
75—77.	Von der Berechnung der Exponenten oder Logarithmen .	129
78—79.	Vom briggischen oder gemeinen logarithmischen Systeme .	133
80.	Erläuterung und Gebrauch der Logarithmen-Tafel . .	137
81.	Berechnung einiger Zahlenausdrücke mit Hilfe der Logarithmen	146
82—84.	Von den Gleichungen	149
85.	Auflösung der Gleichungen	159
86.	Gleichungen des ersten Grades a) mit einer unbekannten	160
87—88.	Anwendung	165
89.	Von allgemeinen Formeln	177

		Seite.
90 — 94.	b) mit mehreren unbekannten	179
95 — 100.	Gleichungen des 2ten Grades a) mit einer unbekannten	197
101 — 102.	Anwendung einer Auflösungsmethode quadratischer Gleichungen auf höhere mit rationalen Wurzeln . . .	206
	Gleichungen von der Form $x^{2m} + px^m = q$ . .	208
103.	b) mit mehreren unbekannten	212
104.	Logarithmische Gleichungen	220
105.	Unbestimmte Gleichungen	224
106.	Besondere Fälle bei Gleichungen	231
107.	Von den Progressionen	232
108 — 110.	Arithmetische Progressionen	233
111.	Von den vieleckigen oder Polygonalzahlen . . .	241
112 — 114.	Von den geometrischen Progressionen	244
115.	Von den unendlichen Progressionen	251
116.	Die Elemente der Combinationslehre	255
117.	Von den Permutationen	256
118.	Von den Combinationen	258
	Anwendung auf die Zahlenlotterie	260
119.	Variationen	262
	Anwendung der Combinationslehre	265
120.	Practische Rechenkunst	268
121.	Von den vaterländischen und einigen wichtigen ausländischen Maßen. Vom Längen-, Flächen-, Körpermaß .	269
122.	Neues französisches Maß und Gewicht	272
123.	Vergleichung und Reduction der in verschiedenen Ländern üblichen Maße: Allgemeines Längenmaß, Weg- oder Meilenmaß, Schnittwaarenmaß (Elle), Fruchtmaß, Getränkmaß, Gewichte (Pfunde)	273
	Von der Zeitrechnung	279
	Von der Geldrechnung	279
124.	Rechnungsarten mit benannten Zahlen	281
125.	Anwendung der Proportionslehre auf benannte Zahlen .	286
126.	Einfache Regel de tri	287
128 — 130.	Gesellschaftsrechnung, Alligationsrechnung, Lex falcidia der Römer, zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung ꝛc., zusammengesetzte Regel de tri, Reesische Regel, Kettenregel	288
131 — 133.	Anwendung der Progressionslehre auf zusammengesetzte Kapitalrechnungen, und solche Gegenstände, die sich wie Kapitalien behandeln lassen	295
	Münztabelle	301
	Logarithmentafel.	

Einleitung.

1.

Die Mathematik ist die Wissenschaft von den Größen.

Größe aber ist, was aus gleichartigen Theilen besteht, oder als Inbegriff solcher gedacht werden kann, und (daher) einer Verminderung oder Vermehrung fähig ist.

Stehen die Theile einer Größe alle in einem ununterbrochenen Zusammenhang, so heißt sie stetig (quantitas continua), und zwar, je nachdem die gleichartigen Theile neben einander oder nach einander sind, räumlich oder zeitlich stetig.

Letztere sind aber als solche kein Gegenstand der Mathematik, sondern nur dann, wenn sie durch Veränderungen im Raume gemessen werden.

Wo aber dieser Zusammenhang der Theile nicht statt findet, sondern selbe abgesondert sind oder gedacht werden können, heißt die Größe diskret (quantitas discreta). Diese sind bloße Aggregate gleichartiger Dinge und werden durch Zahlen ausgedrückt.

Man sieht hieraus, daß jede stetige Größe als diskrete angesehen werden kann, wenn man bloß eine Vergleichung der Ausdehnung macht.

2.

Auf diesen beiden Arten der Größen beruht daher die Eintheilung der Mathematik in

a) Arithmetik (im Allgemeinen) oder Wissenschaft der diskreten, und

b) Geometrie, Wissenschaft der räumlich stetigen Größen,

welche beide hinsichtlich der Sphäre ihrer Untersuchungen sich in niedere und höhere theilen.

Die Gränzen der niedern und höhern Arithmetik sind schwankend.

Die Theile der Arithmetik sind Elementararithmetik, Buchstabenrechnung, Algebra, Combinationslehre, Differenzial- und Integralrechnung.

Die niedere Geometrie handelt von geraden Linien, vom Kreise und von solchen Flächen und Körpern, die sich durch diese Linien darstellen lassen; die höhere von krummen Linien überhaupt, und allen räumlichen Größen, welche mit krummen Linien in Verbindung stehen.

Aus der Verbindung der Arithmetik und Geometrie geht die Trigonometrie hervor, d. h. die Wissenschaft, aus drei gegebenen Stücken eines Dreieckes die drei andern von jenen abhängigen Stücke, so wie den Flächenraum des Dreieckes durch Rechnung zu finden.

So lange man bei der Vergleichung und Bestimmung der Größen von allen wirklichen Gegenständen abstrahirt, heißt die Mathematik rein, sobald aber die Lehren der reinen Mathematik auf wirkliche Gegenstände übergetragen werden, angewandt.

Zur angewandten Mathematik gehören:

1) die praktische Rechenkunst, oder die Arithmetik in ihrer Anwendung auf die gewöhnlichen Rechnungsfälle im bürgerlichen Leben.

2) die praktische Geometrie, oder Anwendung der Geometrie und Trigonometrie auf Bestimmung der Längen, Höhen und Flächen, und zwar auf der Oberfläche der Erde, Geodäsie oder Feldmeßkunst, und unter der Oberfläche der Erde, Markscheidekunst.

3) die physisch-mathematischen Wissenschaften, welche eingetheilt werden in

a. die mechanischen Wissenschaften vom Gleichgewicht und der Bewegung, deren Unterabtheilungen die Statik, oder Lehre vom Gleichgewicht fester Körper, Mechanik — im engern Sinne, oder Dynamik oder Lehre von der Bewegung fester Körper, Hydrostatik oder Lehre vom Gleichgewicht flüssiger Körper, Hydrodynamik — Hydraulik — oder Lehre von der Bewegung flüssiger Körper, Aërometrie oder die Lehre von der Luft, als einem schweren, flüssigen und elastischen Körper.

b. Die optischen Wissenschaften, oder Lehre vom Lichte, deren Abtheilungen die eigentliche Optik, die Lehre vom Lichte, das sich in geraden Linien allenthalben verbreitet, Katoptrik, die Lehre vom zurückgeworfenen Lichte, oder von den verschiedenen Arten der Spiegel, Dioptrik, die Lehre vom gebrochenen Lichte, oder von den optischen Gläsern, Fernröhren, Perspektiv, die Lehre von der Zeichnung der

Gegenstände, wie sie unserm Auge in einer gewissen Entfernung und Lage erscheinen, Photometrie, deren Gegenstand die Ausmessung der Intensität des Lichtes ist.

c. die astronomischen Wissenschaften, deren Unterabtheilungen die Astronomie oder Lehre von der Größe, Bewegung und wechselseitigen Verbindung der Weltkörper, Geographie oder Lehre von der Gestalt, Größe der Erde, und der Lage ihrer Oerter, Chronologie oder Lehre von der astronomischen Zeitbestimmung, Gnonomik oder Lehre von der Zeitbestimmuug mittelst Sonnen=, Monds= und Sternen=Uhren;

d. die architektonischen Wissenschaften, als: die Baukunst, und zwar bürgerliche oder Civilbaukunst, Wasserbaukunst, Straßenbaukunst, Schiffbaukunst, die Artillerie — Pyrotechnie — und Fortifikation oder Kriegsbaukunst.

3.

Größen heißen gleichartig, in wie fern man nur das betrachtet, was sie mit einander gemein haben, ungleichartig, wenn man nur auf das sieht, wodurch sie sich von einander unterscheiden, so sind zwei Münzen von verschiedenem Werthe, die eine von Silber und die andere von Gold, als Münzen (Geldstücke) gleichartig, aber hinsichtlich des Metalles oder des Werthes ungleichartig.

Größen von gleichem Inhalt ohne Beziehung auf Form, heißen gleich. Das Zeichen dieser Uebereinstimmung der Quantität ist $=$.

Die Verschiedenheit der Quantität wird durch die Zeichen $<$ und $>$ bezeichnet, so daß die größere zweier ungleichen Größen gegen die Oeffnung hin zu stehen kommt, z. B. 4 ist größer als 3, wird geschrieben $4 > 3$.

Die Bezeichnung der Größen geschieht durch gewisse Zeichen, welche entweder bestimmte Größen (Zahlen), oder Größen im Allgemeinen bedeuten.

Von der mathematischen Methode.

4.

Man beginnt in der Mathematik mit Erklärungen der zu betrachtenden Gegenstände, worunter man eine deutliche und präcise Bestimmung eines vollständigen Begriffes versteht, z. B. der Kreis ist eine Figur, welche beschrieben wird, wenn sich eine gerade Linie in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte bewegt, bis sie wieder in ihre vorige Lage kommt.

Auf die Erklärungen folgen Sätze (Behauptungen), Aussprüche über die Verbindung eines Merkmals mit einem Gegenstande. Sie sind theoretisch, wenn sie bestimmen, daß etwas so oder nicht so sey, praktisch, wenn sie angeben, daß etwas geschehen kann oder soll.

Die theoretischen sind entweder Grundsätze (Axiome), wenn ihre Wahrheit aus ihnen selbst ganz einleuchtend ist, sobald man sie gehörig aufgefaßt hat, oder Lehrsätze, deren Wahrheit erst aus andern bekannten Wahrheiten abzuleiten, folglich nicht unmittelbar erkenntlich ist.

Die vorzüglichsten Axiome sind:

1) Jede Größe ist sich selbst gleich.
2) Das Ganze ist größer als ein oder mehrere seiner Theile, und ist so groß, als alle seine Theile.
3) Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.
4) Gleiche Größen auf gleiche Weise verändert, sind auch nach der Veränderung wieder gleich.
5) Jede Größe kann für eine andere ihr gleiche gesetzt werden.

Die praktischen sind entweder Forderungssätze (Postulate), wenn die Möglichkeit der Ausführung ohne Beweis einleuchtet, oder Aufgaben, wenn diese Möglichkeit erst nachgewiesen werden muß, was durch die Auflösung geschieht. So wäre der Satz: von einem Punkte zu einem andern eine Linie zu ziehen, ein Forderungssatz, am Ende einer Linie eine senkrechte zu errichten, eine Aufgabe.

Wahrheiten, welche aus andern abgeleitet werden können, heißen Zusätze, und Sätze, welche zur Erläuterung dienen, Anmerkungen. Sätze, welche entweder an einer spätern Stelle erst erwiesen werden, oder aus dem Gebiet anderer Wissenschaften entlehnt sind, Lehnsätze.

Jedem Lehrsatze, so wie jeder gelösten Aufgabe wird ein stets zureichender, vollständiger, streng geführter Beweis, d. h. die Darstellung der Wahrheit eines Satzes aus andern schon bekannten unbezweifelten Wahrheiten — beigefügt. Zeigt jene Darstellung die Richtigkeit des Satzes geradezu, so heißt sie ein direkter Beweis, zeigt sie dieselbe aus der Unmöglichkeit des Gegentheils, so wird sie ein indirekter Beweis genannt. — Geht ferner diese Darstellung von Gründen aus, und führt zur Conclusion, so heißt sie ein synthetischer, und geht sie von der Conclusion aus, und führt zu den Gründen zurück, so heißt sie ein analytischer Beweis. Wenn man einen Satz für mehrere einzelne Fälle beweist, und hieraus auf seine Allgemeinheit

schließt, so heißt der Beweis Induction; schließt man bei der Uebereinstimmung mehrerer Merkmale auf die Gleichheit der übrigen, so heißt dieß ein Schluß aus der Analogie, woraus hervorgeht, daß Induktion und Analogie nur Wahrscheinlichkeit, keine Gewißheit gewähren.

Der entschiedene Vorzug der mathematischen Methode ist, daß sie ihre Begriffe construiren, die Objecte derselben in ihrer Allgemeinheit anschaulich darstellen kann, ehe sie auf Schlußfolgen übergeht. Durch diese Versinnlichung macht daher der Mathematiker die Möglichkeit des Objectes, dem sein Begriff entspricht, vollkommen deutlich, und da er so bestimmte, und vollkommen deutliche Begriffe gebraucht, und von unbezweifelten Grundsätzen ausgeht, so ist auch in den Schlüssen nirgends ein Schwanken oder eine Lücke wahrnehmbar, und die Beweise selbst sind wahre Vorzeigungen dessen, was zu beweisen ist, eigentliche Demonstrationen, welche demnach nicht blos logische, sondern auch anschauliche Gewißheit gewähren. Daher jener hohe Grade der Evidenz, welche nur dieser Wissenschaft eigen und möglich, für jede andere unerreichbar ist, und ihr auch den Namen Mathematik, μάθησις Wissenschaft κατ' ἐξοχήν, verschaffte.

Die ungeheure Ausdehnung der Mathematik auf die übrigen Wissenschaften, deren wir oben erwähnten, zeigt hinlänglich den Nutzen, den sie für die Erweiterung unserer Kenntnisse der Natur, als auch für die meisten Bedürfnisse der menschlichen Gesellschaft leistet, und bürgt schon allein für die Nothwendigkeit des Studiums derselben.

Aber auch von diesen Vortheilen abgesehen, verdient sie die größte Achtung als Bildungsmittel des Verstandes, indem das Studium derselben das Nachdenken schärft, die Urtheils- und Erfindungskraft übt und stärkt, an bestimmten Ausdruck, Ordnung, Deutlichkeit, Genauigkeit und strenge Prüfung gewöhnt, und daher als vorzügliches Vorbereitungsmittel zu andern Wissenschaften zu betrachten ist. — Und da die Mathematik lauter evidente Wahrheiten enthält, so erregt und bestärkt ihr Studium die Wahrheitsliebe, ohne welche das erhabene Bild der Tugend seines ersten Grundzuges ermangelt, und gewährt das Vergnügen, den Geist zum reinern Anschauen der Wahrheit zu erheben, in einsamer Stille der ernsten Betrachtung derselben nachzuhängen, und von ihren Flügeln umschattet, den edlen Durst nach Erkenntniß zu sättigen.

Ueber das Entstehen der Zahlen, und die Zahlensysteme.

5.

Haben, oder denken wir uns irgend eine Vereinigung, oder Menge gleicher Dinge, und wollen diese durch Worte versinnlichen, so ist es nöthig, selbe mit etwas Bekanntem zu vergleichen.

Man nehme daher irgend einen bestimmten, bekannten, jedoch ganz beliebigen Theil an, und diesen nenne man die Einheit. Dann ist es nöthig, anzugeben, wie oft diese Einheit in der Menge, von der es sich handelt, enthalten sey, d. h. wie oft man diese Einheit wird nehmen müssen, um ein dieser Menge gleiches Ganze hervorzubringen. Dieß, wie oftmal, ist es, was wir Zahl nennen. Zahlen sind daher Ausdrücke bestimmter Mengen.

Zur genauen Vorstellung von der Größe eines Dinges, anders als durch das bloße Auffassen mit den Sinnen, gehört demnach die Kenntniß des einen Theiles (der Einheit) und die der Zahl, d. h. wie oft die gegebene Menge diese Einheit enthält.

Die Zahl aber hängt nothwendig von der Einheit ab, und ändert sich mit der Aenderung der Einheit. Zähle ich 100 fl. in Theilen von je 5 fl., so ist 5 fl. die Einheit, und 20 die Zahl, zähle ich sie nach Theilen, deren jeder 1 fl. ist, so ist 1 fl. die Einheit und 100 die Zahl. Insofern daher die Einheit selbst wieder aus mehreren andern niederen Einheiten zusammengesetzt betrachtet werden kann, heißt sie relative Einheit, dagegen absolute oder primitive, wenn sie nicht als Inbegriff niederer Einheiten angesehen werden kann.

Die Einheit ist daher für sich betrachtet keine Zahl, sondern das, woraus die Zahl zusammengesetzt ist. Jedoch als Inbegriff von Theilen kann die Einheit selbst wieder als Zahl betrachtet werden.

Zahlen als bloße Menge von Einheiten betrachtet, heißen unbenannte, z. B. 6; deren Einheit aber ein bestimmter Begriff ist, benannte, z. B. 6 Bücher. Alle unbenannte Zahlen sind gleichartig.

6.

Geht man von der Einheit aus, und bildet durch allmähliges Hinzufügen einer Einheit zu der vorhergehenden Zahl stets neue, so heißt die daraus entstandene Reihe die natürliche Reihe, oder Ordnung der Zahlen, und die Zahlen nach dieser Ordnung angeben, heißt zählen.

Die ersten ganzen Zahlen, welche aus so viel Einheiten bestehen, als die nebenstehenden Punkte angeben, werden durch folgende Worte und Zeichen, die man Ziffer nennt, ausgedrückt:

Eins (1) = •

Zwei (2) = • •

Drei (3) = • • •

Vier (4) = • • • •

Fünf (5) = • • • • •

Sechs (6) = • • • • • •

Sieben (7) = • • • • • • •

Acht (8) = • • • • • • • •

Neun (9) = • • • • • • • • •

Außer diesen neun Zahlzeichen hat man noch 0, welches Null heißt, und die Abwesenheit einer Zahl anzeigt.

Wollte man diese Darstellung auf ähnliche Art fortsetzen, so würde also für jede neue Vereinigung einer Zahl mit der Einheit (d. h. für jede folgende Zahl) ein neues Wort nöthig seyn, wodurch das Zählen äußerst mühsam und sehr beschränkt seyn würde, weil die Sprache die Menge der Worte zur Bezeichnung der Zahlen nicht herzustellen im Stande wäre.

7.

Um aber nicht zu einer so großen Menge von Worten Zuflucht nehmen zu müssen, brachte man die Zahlen auf folgende Weise in Klassen:

Die erste Klasse begreift die oben angegebenen aus einfacher Zusammensetznng der Einheiten entstandenen Zahlen, die man deßwegen auch Einer nennt.

Zehn Einheiten in diesem Sinne heißen ein Zehner, welche wieder eben so, wie die Einheiten gezählt werden, zwei Zehner, drei Zehner ꝛc., wofür wir bekanntlich die Benennungen zehn, zwanzig, dreißig u. s. w. haben, und welche Zahlen die 2te Klasse ausmachen.

Mit dem zehnfachen Zehner (welchen man Hunderter nennt, und die nun wieder wie die vorigen Klassen gezählt werden) beginnt die 3te Klasse, und mit dem zehnfachen Hunderter die der Tausender. Die Tausender sind nun wieder einfache, zehnfache, und hundertfache, und machen die 4te, 5te und 6te Klasse aus.

Diese 6 Klassen, von den Einheiten bis zu den hundertfachen Tausender, bilden die erste Hauptklasse, die jedoch keinen eigenen Namen führt. Mit dem zehnfachen dieser ersten Hauptklasse beginnt die 2te, Klasse der Millionen genannt, welche wieder alle diese Unterabtheilungen wie die erste Hauptklasse, nemlich von den einfachen bis zu den hunderttausendfachen Millionen enthält, wovon nun wieder das zehnfache den Namen Billion führt. So reihen sich nun die Hauptklassen unter folgenden Namen an einander: Million, Billion, Trillion, Quadrillion, Quintillion, Sextillion ꝛc. stets dasselbe Gesetz befolgend.

8.

Um aber auch diese glückliche Erfindung auf die Schrift überzutragen, kam man überein, den obengenannten Zahlzeichen einen doppelten Werth, einen an und für sich unveränderlichen, und einen durch Stellung veränderlichen, beizulegen, wodurch der Bedarf der Ziffer auf 10 beschränkt war.

Es erhält nemlich jede Ziffer einen 10mal größern Werth, so oft sie um eine Stelle von der Rechten zur Linken rückt.

Es ist demnach

2 = zwei Einheiten, oder zwei.

24 = 2 Zehner und 4 Einheiten, oder vier und zwanzig.

236 = 2 Hunderter, 3 Zehner, 6 Einheiten, oder 2 Hundert, sechs und dreißig.

2049 = 2 Tausender, 0 (oder keinen) Hunderter, 4 Zehner und 9 Einheiten, oder zwei tausend und neun und vierzig.

45986 = 4 Zehntausender, 5 Tausender, 9 Hunderter, 8 Zehner 6 Einheiten, oder 45 tausend, 9 hundert und 86.

368437 = 3 Hunderttausender, 6 Zehntausender, 8 Tausender, 4 Hunderter, 3 Zehner und 7 Einheiten, oder dreimal hundert, acht und sechszig tausend, vier hundert und sieben und dreißig.

Man sieht hieraus, daß eine sechszifferige Zahl alle die Unter-

abtheilungen der ersten Hauptklasse der Zahlen umfasse. Da nun die folgenden Klassen die nemliche Eintheilung haben, und sich nur durch ihre Hauptklassen-Benennungen unterscheiden, so ist es, wenn man sich in der Aussprache sechsziffériger Zahlen Fertigkeit erworben hat, nicht schwer, jede mehrzifferige Zahl auszusprechen, so wie jede gegebene Zahl durch Ziffer auszudrücken, oder anzuschreiben.

Vielzifferige Zahlen theile man von der rechten gegen die linke Hand in Klassen von 6 Ziffer, und scheide diese Klassen durch Kommata, welche rechts vor jeder 6ten Ziffer oben gesetzt werden, und zwar vor die 6te Ziffer ′, vor die 12te ″, 18te ‴ u. s. w. Daß die letzte Klasse auch weniger als 6 Ziffer enthalten kann, bedarf kaum einer Erwähnung.

Jede einzelne Klasse theile man wieder zwischen der 3ten und 4ten Ziffer durch ein Komma in der Linie.

Nach dieser Eintheilung spreche man, von der Linken zur Rechten ausgehend, jede einzelne Klasse für sich aus, jedes Komma in der Linie durch Tausend, nnd die obenstehenden ′, ″, ‴, ⁗, nach der Reihe durch Million, Billion, Trillion, Quadrillion ꝛc., jedoch von der höhern Klasse beginnend. So heißt

602468790679857001 2830 = 6,024‴687,906″798,570′012,830.

6 tausend 24 Trillionen, 687 tausend 906 Billionen, 798 tausend 570 Millionen, 12 tausend 830.

Jede ausgesprochene Zahl durch Ziffer darzustellen, setzt ebenfalls nur voraus, jede Zahl unter einer Million fertig anschreiben zu können, indem man dann nur die ausgesprochene Menge der Einheiten der ersten Hauptklasse, der Millionen, der Billionen u. s. w. untereinander schreibt, und rechts ober die letzte Ziffer jeder Hauptklasse mit Ausnahme der ersten oder niedrigsten Hauptklasse die Zeichen ′, ″, ‴ ꝛc. setzt, je nachdem sie Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. vorstellt.

Nun setze man zuerst links die höchste Klasse, und reihe dann die nächstniedrigen Klassen an, mit dem Bemerken, daß, wenn die Anzahl der Ziffer dieser angereihten Klassen nicht 6 beträgt, diese durch vorgesetzte Null ergänzt werden.

Sollte in den aufeinander folgenden Hauptklassen einer ausgesprochenen Zahl eine oder mehrere fehlen, so muß ihre Stelle durch 6 Null ergänzt werden, z. B.

308 Trillionen, 46035 Billionen, 8716 Millionen, 623008.

308‴
46035″
8716′
623608
308‴046,035″008,716′623,608.
24 Quadrillionen, 236 Millionen.
24⁗
236′

Da hier die Klasse der Trillionen, der Billionen, so wie die erste Hauptklasse fehlen, so wird die gegebene Zahl durch folgende Zifferreihe ausgedrückt:

24⁗000000‴000000″000236′00000.

Die Anweisung, genannte Zahlen durch Ziffern richtig darzustellen, und durch Ziffer bezeichnete auszusprechen, heißt Numeration. Letzteres (das Aussprechen) gehört eigentlich nicht in die Mathematik, sondern in die Grammatik, da die Regeln der Aussprache nicht in allen Sprachen einerlei sind. Man nennt so eine systematische Ordnung in den Zahlen ein Zahlensystem, und die Zahl der Einheiten, welche in die nächst höhere Klasse zusammengefaßt werden, die Basis oder Grundzahl des Systems. Da in dem angeführten (bei allen gebildeten Völkern jetzt gebräuchlichen) Zahlensystem zehn die Grundzahl ist, so heißt das System das dekadische, oder die Dekadik.

Man sieht leicht ein, daß jede Zahl als Basis angenommen werden könnte, mithin unzählige Zahlensysteme möglich sind. Man hat dann für jedes Zahlensystem so viel Zeichen nöthig, als die Basis des Systems Einheiten enthält.

Wollte man durch 2 Zeichen z. B. 1 und 0 alle Zahlen bezeichnen, so müßte man das Gesetz annehmen, daß die von der Rechten gegen die Linke folgende Stelle immer 2mal so viel bedeuten soll, als die vorhergehende; mit 3 Zeichen (0, 1, 2) dreimal so viel, mit 4 viermal so viel u. s. w.

Man erhält dann den Ausdruck aller Zahlen, wenn man an die Stelle der 0 nach und nach die bedeutenden Ziffer treten läßt. —

Nachstehende Tabelle enthält die ersten 20 Zahlen nach dem dyadischen System (aufgestellt von Leibnitz 1703) triadischen, tetradischen (von Weigel 1687) und dem dodekadischen, wozu 12 Zeichen nöthig sind, so daß (↊) zehn, und (↋) eilf bedeutet.

dekadisch.	dyadisch.	triadisch.	tetradisch.	dodekadisch.
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	10	3	3
4	100	11	10	4
5	101	12	11	5
6	110	20	12	6
7	111	21	13	7
8	1000	22	20	8
9	1001	100	21	9
10	1010	101	22	♁
11	1011	102	23	♀
12	1100	110	30	10
13	1101	111	31	11
14	1110	112	32	12
15	1111	120	33	13
16	10000	121	100	14
17	10001	122	101	15
18	10010	200	102	16
19	10011	201	103	17
20	10100	202	110	18.

Für die 2 Zeichen ♁ = 10, ♀ = 11 sind natürlich auch zwei neue Wörter nöthig.

Jede dekadisch ausgedrückte Zahl kann nach einem andern Systeme sehr leicht durch fortgesetzte Division mit der Grundzahl des Systems ausgedrückt werden.

Die dekadische Zahl 1832 soll dodekadisch ausgedrückt werden. Man dividire so lange, bis man auf den Quotienten = 0 kommt, und schreibe die Reste verkehrt neben einander.

1832	152	12	1	0
12	12	12	12	
Rest 8	8	0	1	

mithin dekadisch 1832 = 1088 dodekadisch. Denn

$8 + 8 . 12^1 + 0 . 12^2 + 1 . 12^3 = 8 + 96 + 0 + 1728 =$ 1832, woraus zugleich das Verfahren erkenntlich ist, wie jede nach einem beliebigen Systeme geschriebene Zahl sich dekadisch ausdrücken läßt.

Die wissenschaftliche Darstellung eines Zahlensystems setzt Kenntniß der Potenzenlehre voraus.

Da man durch den unmittelbaren Anblick der Zahlen keinen eigentlichen Begriff von ihrer Größe sich machen kann, so kann besonders Anfängern die Größe gegebener Zahlen, zumal wenn selbe nicht gar zu groß sind, durch Vergleich mit Größen aus dem gemeinen Leben versinnlichet werden.

Begriffe von großen Zahlen aber, welche im gewöhnlichen Leben nicht gebraucht werden, sind daher nicht so leicht zu verschaffen, da irdische Gegenstände keinen Maßstab dazu gewähren. Um z. B. einen Begriff von einer Trillion Gulden sich zu machen, bestimme man die Zeit, welche, selbe zu zählen, erfodert würde, und man findet, daß, wenn von allen Menschen auf der Erde jeder alle Tage 100,000 fl. zählen würde, doch circa 25 Jahre erfoderlich wären.

Deßgleichen würde eine Kanonenkugel, wenn sie in jeder Sekunde 2000 Fuß zurücklegen würde, bis zu dem nächsten Fixsterne, dessen Entfernung zu 7 Billionen Meilen angenommen, eine Zeit von ohngefähr 2'600,000 Jahren nöthig haben. — Eine Trillion Weizenkörner sind ohngefähr 150,000 Millionen bayerische Schäffel.

Anmerkung. Den Grund, daß fast alle Völker bis zehn zählten, haben wir, wie schon Aristoteles behauptete, in der Gestalt unserer Hände und Füße als fünfästiger Organe zu suchen. Selbst Leute, welche unsere Ziffer gar nicht gebrauchten, rechneten vermittelst des Rechentisches (abacus) nach zehn, indem Merkmale der Einheiten, welche etwa Steinchen (calculus, daher Calcul, calculiren) vorstellten, auf diese oder jene Linie gelegt, ebenso höhere Werthe erhielten, wie unsere Ziffer an verschiedenen Stellen. Eine Ausnahme hievon machten Thracier, die nur bis 4, Grönländer und ein ostiakischer Stamm, die bis 5 zählten.

Allein die Zahlzeichen der Alten, so wie die Art, große Zahlen zu schreiben, waren höchst unbequem, indem sie sich meistens ihrer Alphabete bedienten, z. B. Griechen, Hebräer ꝛc. Die römische Bezeichnungsart war

für	1.	5.	10.	50.	100.	500.	1000.
	I.	V.	X.	L.	C.	IↃ oder D.	CIↃ oder M.

für die übrigen Zahlen galt das Gesetz, daß gleiche nebeneinanderstehende Zeichen eine Vervielfachung des einfachen andeuteten: III = 3, XXX = 30.

Von ungleichen war das kleinere vornstehend als abzuziehend, nachstehend als zu addirend zu betrachten. Z. B. IX = 9, XI = 11, XL = 40, LX = 60;

aber MM oder IIM war 2000. IↃↃ oder VM = 5000.
CCIↃↃ = 10000. IↃↃↃ = 50,000. CCCIↃↃↃ oder CM = 100,000.
IↃↃↃↃ oder DM = 500,000 und CCCCIↃↃↃↃ oder $\overline{\text{M}}$ = 1000,000

Unsere Bezeichnungsart der Zahlen haben wir von den Arabern, und diese von den Indern, erhalten, wenn auch die jetzigen Zahlzeichen der letztern nicht mit den unsrigen übereinkommen, indem es hiebei nur auf die Art und Weise der Darstellung, und nicht auf die Form der Zeichen ankommt. Im 9ten Jahrhundert sollen sie schon in Frankreich bekannt, und in den folgenden 2 Jahrhunderten allmählig zu uns gekommen sein.

Noch verdient bemerkt zu werden, daß einige südliche Völker Europa's, z. B. Franzosen, Italiener, Spanier ꝛc. unsere Eintheilung der Zahlen nur bis zu der Classe der Millionen beibehalten, von den Millionen angefangen, stets 3 Ziffer eine Hauptclasse bilden, so daß

43'''876''789'683247

ausgesprochen wird: 43 Trillionen, 876 Billionen, 789 Millionen und 683247.

9.

Das erste und wesentlichste Geschäft der Arithmetik besteht darin, die einfachsten ursprünglichen Veränderungsarten der Zahlen aufzusuchen, und ihre Regeln darzustellen.

So wie wir §. 6 gesehen haben, daß bei dem Zählen nach der natürlichen Ordnung, jede nachfolgende Zahl durch das Hinzufügen der Einheit zu der unmittelbar vorhergehenden erzeugt wird, so muß es auch überhaupt möglich seyn, gleichartige Zahlen zu einer einzigen zu vereinigen, welche in einem Inbegriff dasselbe befassen soll, was in jenen einzelnen abgesondert enthalten ist.

Das hiezu nöthige Verfahren heißt die Addition.

Ereignet es sich, daß die zu addirenden Größen einander gleich sind, so ist die Summe um so vielmal größer, als Größen zusammen verbunden werden sollen, und die Arithmetik gibt hier besondere Vorschriften, diese Addition gleicher Zahlen schneller zu bewerkstelligen, welches Verfahren die Multiplikation genannt wird.

Wie wir aber auf die angegebene Weise Zahlen vereinigen, und in Verbindung ausdrücken können, so muß auch ein Trennen gegebener Zahlen, oder ein Vergleich ihrer Werthe, nm wie viel oder wie vielmal eine die andere übertreffe, möglich seyn. Soll also eine Zahl von einer andern weggenommen werden, d. h. soll der Unterschied zweier Zahlen angegeben werden, so heißt das hiezu nöthige Verfahren die Subtraction.

Da aber auch wieder verlangt werden kann, wie oft ein und dieselbe Größe von einer andern hinweggenommen werden kann, bis erstere verschwindet, was so viel heißt, als angeben, wie oft die eine

in der andern enthalten ist, so hat man für letztere Art der Subtraction ein abgekürztes Verfahren, welches Division genannt wird.

Obwohl die Multiplikation nur eine abgekürzte Addition, und die Division eine abgekürzte Subtraction ist, so unterscheiden sie sich doch dadurch von einander, daß bei der Multiplikation und Division dieselbe Zahl wiederholt addirt und subtrahirt werden soll, worauf bei der Addition und Subtraction nichts ankommt.

Alle diese 4 Rechnungsarten setzen eigentlich immer 2 Zahlen voraus, und wenn daher mehrerer Zahlen addirt, subtrahirt, multiplicirt oder dividirt werden sollen, so ist dieß nur als eine Wiederholung der Operation zu betrachten.

Außer diesen 4 Rechnunsarten, welche man auch die 4 Species zu nennen pflegt, ist offenbar keine mehr möglich, da jede Veränderung einer Zahl nur auf eine der angegebenen Arten geschehen kann.

A d d i t i o n.

10.

Addiren heißt eine Zahl finden, die zweien oder mehreren gegebenen zusammengenommen gleich ist.

Die gegebenen oder zu addirenden Zahlen heißen Summanden, ihr Inbegriff, oder die zu findende Summe. Das Zeichen der Addition ist + zwischen die Summanden gesetzt.

Nachstehende Tafel enthält die Summe je zweier Einer:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.

Da die Summanden die Theile, die Summe das Ganze darstellt, so folgt, daß nur gleichartige Größen addirt werden können.

Für die Addition mehrzifferiger Zahlen gelten folgende Gesetze:

Man schreibe die gegebenen Zahlen so untereinander, daß die Ziffer, welche sich auf einerlei Einheiten beziehen, gerade unter ein-

ander kommen, welches geschieht, wenn die letzteren Ziffer rechts gerade unter einander stehen, und ziehe unter sämmtliche Summanden einen horizontalen Strich, addire die vorhandenen Vertikalreihen von der Rechten gegen die Linke, und schreibe unter jede Columne die Summe, doch so, daß die in jeder Reihe erhaltenen höhern Einheiten ausgezogen, zu der nächst links stehenden Columne gezählt, und nur die allenfalls übriggebliebenen Einheiten der Columne, und in deren Abwesenheit 0, angeschrieben werden. z. B. man soll 7853, 879, 67 und 5 addiren:

7853
879
67
5

8804. Also 7853 + 879 + 67 + 5 = 8804.

Subtraction.

11.

Gegebene Zahlen subtrahiren oder abziehen heißt, den Unterschied zwischen 2 gegebenen Zahlen angeben, oder jene Zahl finden, die zu der abzuziehenden addirt, die andere der gegebenen hervorbringt. Die Zahl, an der das Abziehen vollzogen wird, heißt Minuend, jene, welche abgezogen wird, Subtrahend, und die nach vollzogener Subtraktion noch übrigbleibende Rest oder Differenz. Das Zeichen der Subtraction ist (—) zwischen Minuend und Subtrahend gesetzt.

Aus dem Begriffe der Subtraction folgt, daß Minuend, Subtrahend und Rest gleichartige Größen sein müssen.

Die Subtraktion einzifferiger Zahlen von höhern einzifferigen oder von einer 2zifferigen Zahl, deren Ziffer links 1, und rechts eine niedrigere einzifferige Zahl als die abzuziehende ist, ist mit Hilfe der bei der Addition beigefügten Tafel leicht zu vollziehen, indem man den einzifferigen Subtrahend in der obern Horizontalreihe, den Minuend unter den Zahlen, die mit ihm in einer Vertikalreihe stehen, sucht, wobei das Glied der Vertikalreihe zur Linken, welches mit dem gefundenen Minuend in einer Horizontalreihe steht, der gesuchte Rest oder Unterschied ist.

Bei der Subtraction mehrzifferiger Zahlen beobachte man folgende Regel:

Man schreibe die kleinere Zahl unter die größere, wie bei der Addition, ziehe von der Rechten zur Linken jede Ziffer des Subtrahends von der darüber stehenden des Minuends ab, und schreibe den Rest unter die entsprechenden Zifferstellen. So oft aber eine Ziffer des Subtrahends größer als die obenstehende im Minuend ist, so nehme man eine Einheit von der nächsten Ziffer gegen die Linke, welche für die Ziffer, für welche sie genommen wurde, 10 gilt, wie aus der Natur der Zahlen bekannt ist, wornach die Subtraction allzeit möglich ist. Die Ziffer, von welcher entlehnt wurde, ist dann natürlich um dieses 1 kleiner. Ist die Zifferstelle, von welcher entlehnt werden soll, Null, oder folgen sogar mehrere Null, so gehe man bis zur nächsten bedeutenden Ziffer, wodurch die dazwischen befindlichen Null, alle 9 werden, bis auf die letzte Null rechts, welche 10 wird, wenn von der vorhergehenden Ziffer die entsprechende Ziffer des Subtrahends abgezogen werden kann, widrigenfalls auch aus der ersten Null 9 wird. z. B.

879 — 754
3676 — 2879
8006 — 4724
89002 — 6835
90000 — 73876

879	3676	8006	89002	90000
754	2879	4724	6835	73876
125	797	3282	82167	16124

Da man alle Theile des Subtrahends von den gleichartigen Theilen des Minuends abzieht, so erhält man durch die Auflösung den gesuchten Rest.

Besteht der Subtrahend aus mehreren Theilen, so kann man letztere nach einander vom Minuend abziehen, oder kürzer die Theile des Subtrahends in eine Summe vereinigen, und als Summe subtrahiren.

Da Subtrahend und Rest addirt, dem Minuend gleich ist, so kann man sich hiedurch von der Richtigkeit des Verfahrens bei der Subtraction überzeugen. Ebenso kann man die Richtigkeit der Summe addirter Zahlen prüfen, wenn man die einzelnen Summanden nach einander von der Summe abzieht, wo zuletzt kein Rest mehr übrig bleiben darf.

Von der sogenannten Fünfer-, Siebner-, Neuner- und Eilferprobe mündlich.

Multiplication.

12.

Es ist schon erwähnt worden, daß, wenn ein und dieselbe Größe mehrmal zu sich addirt werden soll, ein kürzeres Verfahren als die gewöhnliche Addition möglich sei, welches man Multiplication nenne.

2 Zahlen mit einander multipliciren, heißt also, die eine so oft nehmen, als die andere anzeigt. Die Zahl, welche so oft genommen werden soll, als die andere angibt, heißt der Multiplicand, und welche sagt, wie oft erstere zu nehmen sei, Multiplicator. Beide führen den Namen Faktoren, die daraus erhaltene Summe heißt Produkt. Das Zeichen für diese Rechnungsart ist $\times$ oder . zwischen Multiplicand und Multiplicator gesetzt.

$4 \times 3 = 12$ wird gelesen, 4 multiplicirt mit 3 gibt 12. Da aber eben so gut $3 \times 4 = 12$ ist, so sieht man, daß sich Multiplicand und Multiplicator verwechseln lassen, ohne daß das Produkt sich ändert. Jede Zahl mit der Einheit multiplicirt bleibt sich gleich, und wird, mit 0 multiplicirt, selbst 0.

Für die Multiplikation einfacher Zahlen kann keine eigene Regel aufgestellt werden.

Die Produkte je zweier Einer enthält nachstehende Tafel, welche das Einmaleins, oder pythagoräische Rechentafel heißt.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.
4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.	36.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.
6.	12.	18.	24.	30.	36.	42.	48.	54.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.
8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.

deren Gebrauch sehr verständlich ist. Um nemlich das Produkt zweier einzifferiger Zahlen zu finden, suche man die eine der gegebenen Zahlen in der obern Reihe, die andere in der ersten Vertikalreihe, so enthält jenes Fach, welches mit der Zahl in der Vertikalreihe, und mit der in der obern Reihe in einer Horizontalreihe ist, das Produkt. z. B. für 7×8 findet man in der obern Horizontalreihe, bei 7 herabgefahren bis in die Vertikalreihe zu 8, die Zahl 56, mithin $7 \times 8 = 56$.

Ist eine einzifferige Zahl mit einer mehrzifferigen zu multiplici=

ren, so multiplicire man von der Rechten gegen die Linke, mit Hilfe der obigen Rechentafel jede Ziffer der mehrzifferigen Zahl mit der einzifferigen, und schreibe die Produkte, wenn sie einzifferig sind, ebenfalls von der Rechten gegen die Linke an. Ist aber das Produkt eine zweizifferige Zahl, so setze man blos die letzte Ziffer an, und addire die höhern zum folgenden Produkte, mit Ausnahme des letztern, welches ganz hingeschrieben wird.

Sind Multiplicand und Multiplicator mehrzifferige Zahlen, so setze man beide, wie bei der Addition unter einander, und multiplicire mit der niedrigsten Ziffer der letztern Zahl den ganzen Multiplikand, ebenso verfahre man mit den übrigen Ziffern des Multiplikators, und schreibe sämmtliche Produkte so unter einander, daß die niedrigste Ziffer jedes Produktes gerade in einer Verticalreihe mit derjenigen Ziffer des Multiplikators zu stehen kommt, die mit dem Multiplicand multiplicirt, dieses Produkt gegeben hatte, addire hierauf alle Produkte in dieser Stellung, so erhält man das gesuchte Produkt der gegebenen Zahlen. — Kommen im Multiplicator Nullen vor, so überspringt man sie, und multiplicirt nur mit der bedeutenden Ziffer, mit Beibehalt der Gesetze wegen der Stellung der Produkte. Hat einer oder beide Faktoren am Ende Null, so multiplicire man ebenfalls nur die bedeutenden Ziffer, und setze dem gefundenen Produkt alle weggelassene Null rechts bei. Es wird daher eine Zahl mit 10, 100, 1000 ꝛc. multiplicirt, wenn man dem Multiplicand 1, 2, 3 u. s. w. Null rechts beisetzt.

Bei mehr als 2 gegebenen Faktoren, suche man zuerst das Produkt von zweien, multiplicire dieß mit dem 3ten, und das jetzt erhaltene mit dem 4ten u. s. w., wobei jedoch wieder ganz einerlei ist, in welcher Ordnung die Faktoren genommen werden.

Beispiele: 348 × 5, 5306 × 508,
48 × 60, 4300 × 1700.

348	5306	48	43
5	508	60	17
1740	42448	2880	301
	26530		43
	2695448		7310000

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens gründet sich darauf, daß die Summe alle Theile des Multiplicands so oft enthält, als der Multiplicator anzeigt. Um sich von der Richtigkeit eines

erhaltenen Produktes zu überzeugen, ist die Wiederholung der Multiplication mit Verwechslung der Faktoren vorzüglich zu empfehlen. Die eigentliche Probe jedoch geschieht durch Division des gegebenen Produktes durch einen der Faktoren, wodurch der andere wieder zum Vorschein kommen muß.

Durch häufige Uebung wird man mit vielen Vortheilen bei der Multiplikation bekannt.

Division.

13.

Diesen Namen führt wieder die abgekürzte Subtraction, da es nemlich vollkommen einerlei ist, zu fragen, wie oft eine gegebene Zahl von einer andern abgezogen werden kann, bis letztere verschwindet, oder, wie oft erstere in letzterer enthalten sei.

Die Zahl, in die getheilt werden soll, heißt Dividend, womit getheilt wird, Divisor, die gefundene Quotient, oder Quotus.

Das Zeichen, womit die Division angedeutet wird, ist —, über welches der Dividend, und unter welches der Divisor gesetzt wird, oder :, so daß vor diese 2 Punkte der Dividend, und nach denselben der Divisor zu stehen kommt. Bei der Division bloßer Zahlen sind jedoch mancherlei Stellungen des Dividends, Divisors und Quotienten gebräuchlich.

Jede Zahl durch 1 dividirt bleibt sich gleich, und gibt durch sich dividirt die Einheit als Quotient.

Der Quotient, welchen man durch Division einer ein- oder zweizifferigen Zahl durch eine einzifferige erhalten kann, ist aus dem Einmaleins leicht zu bestimmen. Wenn aber der Dividend aus mehreren Ziffern besteht, beobachte man folgendes Verfahren:

Man theile mit dem Divisor die erste, und wenn diese zu klein ist, die zwei ersten Ziffer des Dividends, so ist die erhaltene Zahl die erste Ziffer des Quotienten; diese wird mit dem Divisor multiplicirt, und dieß Produkt von dem Partialdividenden abgezogen.

Dem allenfallsigen Rest setze man die folgende Ziffer des Dividends rechts bei, (wenn kein Rest geblieben ist, kommt diese Ziffer allein herab), und theile wie zuerst, so erhält man die zweite Ziffer des Quotienten. Das Produkt aus diesem zweiten Theile des Quotienten in den Divisor, ziehe man wieder von der Zahl, in die getheilt

wurde, ab, und setze dieß Verfahren so lange fort, bis alle Ziffer des Dividends herabgesetzt sind. So oft so ein Partialdividend kleiner als der Divisor ist, wird im Quotient ein Null gesetzt.

Die Division einer Zahl durch einen mehrzifferigen Divisor geht nach demselben Gesetze; es müssen daher anfangs so viele Ziffer als Partialdividend angenommen werden, bis die Theilung durch den Divisor möglich ist, der jedesmalige Quotient muß mit dem ganzen Divisor multiplicirt, und dieß Produkt von der als Dividend genommenen Zahl abgezogen werden. Zu dem Reste, oder wenn auch kein solcher vorhanden ist, wird stets nur eine Ziffer herabgesetzt, daher der Fall leicht eintreten kann, daß mehrmal nach einander der Quotient 0 ist.

Durch Uebung lernt man auch wieder die vielen Vortheile bei der Division am besten kennen.

In vielen Fällen bleibt nach vollendeter Division noch eine Zahl übrig, welche jedoch stets kleiner als der Divisor ist, und also anzeigt, daß der Quotient keine ganze Zahl sein kann, sondern zwischen die gefundene, und die um 1 größere Zahl falle. Man pflegt daher diesen Rest so dem Quotienten beizusetzen, daß man den Rest über, und den Divisor unter einen Querstrich schreibt.

Beispiele: 74688 : 8; 67249 : 23; 508542 : 647; 728769 : 583.

74688	9336.
8	
72	
26	
8	
24	
28	
8	
24	
48	
8	
48	
...	

67249	2923 20/23.
23	
46	
212	
23	
207	
54	
23	
46	
89	
23	
69	
20	

508542	786.	728769	1250 19/583.
647		583	
4529		1457	
5564		583	
647		1166	
5176		2916	
3882		583	
647		2915	
3882		...19	
....			

Die angeführte Division setzt stets voraus, daß der Divisor < als der Dividend sei.

Der Beweis für die Richtigkeit des angegebenen Verfahrens geht daraus hervor, daß alle Theile des Dividends durch den ganzen Divisor getheilt werden, mithin die Summe der einzelnen Quotienten der gesuchte Quotient sein muß.

Die Probe der Division geschieht durch Multiplication, indem aus dem Begriffe der Division folgt, daß, wenn der Divisor im Dividend ohne Rest enthalten ist, das Produkt des Divisors und Quotienten dem Dividend gleich sein muß. Wo aber noch ein Rest bleibt, muß derselbe, zu dem Produkte des Quotienten in den Divisor gezählt, den Dividend hervorbringen.

Soll eine Zahl durch mehrere andere getheilt werden, so kann man die Division entweder theilweise (nach einander) vollziehen, oder man multiplicirt die Divisoren mit einander, und dividirt mit dem ganzen Produkt. z. B. 192 : 2 : 3 : 4 =

192 : 2 = 96 : 3 = 32 : 4 = 8

oder 192 : 2 × 3 × 4 = 192 : 24 = 8.

Entgegengesetzte Größen.

14.

Größen, die, wenn sie mit einander verbunden werden, ein Resultat geben, das größer ist, als jede einzelne derselben, heißen übereinstimmend; z. B. 6 fl. Vermögen und 5 fl. Vermögen geben 11 fl. Vermögen. 8 fl. Schulden und 9 fl. Schulden sind 17 fl. Schulden.

Aber schon Gegenstände des gemeinen Lebens geben uns hinlängliche Beweise, daß es Größen gibt, die einander gerade entgegen=

gesetzt sind: Vermögen und Schulden, Steigen und Fallen, Vorwärts- und Rückwärtsgehen, Kräfte, die in entgegengesetzter Richtung wirken ꝛc. Kommen solche Größen in Verbindung mit einander, so wird keine durch die andere vermehrt, sondern vermindert. Wer 15 fl. Vermögen, und 5 fl. Schulden hat, hat nur 10 fl. Vermögen. Wer 25 Schritte von einem bestimmten Orte vorwärts, und 12 rückwärts ging, ist nur 13 Schritte von dem Orte, wo er ausging, entfernt. Man nennt solche Größen entgegengesetzte, und unterscheidet sie durch die Benennungen positiv und negativ, welche Namen durch die Zeichen + und — bezeichnet werden. So ist (+ 7) ausgesprochen positiv 7, das Gegentheil von (— 7), ausgesprochen negativ 7. Da jedoch zur Unterscheidung zweier Dinge nur ein Zeichen nöthig ist, so bleibt gewöhnlich das Zeichen + weg, 7 und (— 7). Das Zeichen und die Größe, vor der es steht, gehören unzertrennlich zusammen, sind daher nicht abgesondert zu betrachten, weil das Zeichen die unterscheidende Eigenschaft anzugeben hat. Man schließt sie deßwegen auch meistens in Klammern ein (+ 5), (— 6).

Welche von zwei entgegengesetzten Größen aber man als positiv, und welche als negativ zu betrachten habe, darüber gilt kein Gesetz, weil durch die Bezeichnung nur ihr Unterschied angegeben werden soll. Die Sache ist willkürlich: Schulden sind negativ, wenn Vermögen als positiv angenommen wird, und umgekehrt. Nur muß man bei der einmal gewählten Bezeichnung für die Dauer der Rechnung bleiben.

Entgegengesetzte Größen sind nicht ihrem Wesen nach, sondern nur ihrer Quantität nach verschieden, indem man die eine durch Subtraction aus der andern erzeugen kann; so komme ich von 10 fl. Vermögen auf 15 fl. Schulden, wenn ich allmählig 1 fl. nach dem andern von dem Vermögen wegschenke, und die Ursache dieser Abnahme in der Art fortdauern lasse, daß, wenn die 10 fl. verschenkt sind, ich noch 15mal einen Gulden verspreche.

Der Werth einer Größe ohne Beziehung auf eine andere ihr entgegengesetzte heißt ihr absoluter Werth, welchem daher eigentlich keine der beiden Benennungen (positiv oder negativ) zukommt, obwohl man alle Größen ohne Vergleich mit andern, blos als Mengen von Einheiten betrachtet, positiv zu nennen pflegt.

Ist daher eine negative Größe allein gegeben, so deutet dieß immer auf einen vorhergegangenen Vergleich, mit einer ihrer entgegen-

gesetzten hin. Soll Jemand, der 50 fl. Schulden hat, seinen Vermögensstand angeben, so muß er sagen, er habe 50 fl. von dem Entgegengesetzten des Vermögens, also, wenn das Vermögen als positiv angenommen wird, — 50 fl.

Auch würde er, wenn er 50 fl. erhielte, noch kein Vermögen haben, und hat demnach weniger als Nichts, wodurch die Behauptung: daß negative Größen weniger als nichts sind, gerechtfertigt, jedoch mit Vorsicht aufzufassen ist.

An und für sich betrachtet hat eine negative Größe denselben Werth als eine gleich große positive, aber jede ist in Rücksicht auf die andere weniger als nichts. — Wer zweifelt wohl, daß 50 fl. Schulden nicht ebenso 50 fl. sind, als 50 fl. Vermögen? aber die 50 fl. Schulden sind um 50 fl. weniger, als kein Vermögen, so wie 50 fl. Vermögen um 50 fl. weniger sind, als keine Schulden.

Gleich große, aber entgegengesetzte Größen heben einander auf: $+ 10$ und $- 10 = 0$. Null ist also die Grenze zwischen positiv und negativ.

Ueber den Unterschied der Zeichen + und — als Qualitäts- und als Operationszeichen bei den Rechnungsarten.

Daß aber in der gemeinen Arithmetik, oder bürgerlichen Rechenkunst entgegengesetzte Größen nicht vorkommen, rührt daher, weil in den Fällen des gemeinen Lebens dieser Gegensatz durch Worte so deutlich ausgedrückt ist, daß der Verstand sogleich zu entscheiden vermag. Hat jemand 300 fl. Vermögen, und 200 fl. Schulden, so weiß der gemeine Menschenverstand, daß man den eigentlichen Vermögensstand erhält, wenn man die 200 fl. von 300 fl. abzieht, und daß der Rest 100 Gulden Vermögen ist.

Sehr einfach folgt aus dem von entgegengesetzten Größen aufgestellten Begriffe das Verfahren der Rechnungsarten mit denselben:

15.

Größen, welche in Ansehung ihres Zeichens übereinstimmen, seien sie positiv, oder negativ, werden addirt, wie gewöhnlich, und die Summe hat einerlei Zeichen mit den Summanden, z. B.

$$(+ 5) + (+ 7) + (+ 9) = + 5 + 7 + 9 = 21.$$
$$(- 5) + (- 7) + (- 9) = - 5 - 7 - 9 = - 21.$$

Aber Größen von entgegengesetzten Zeichen werden addirt, wenn man die kleinere von der größern abzieht, und dem Reste das Zeichen der

grösern gibt, da eine negative Größe zu einer positiven addiren, soviel ist, als das Gegentheil von ihr (also die Größe positiv) subtrahiren,

$$(+ 12) + (- 8) = + 12 - 8 = 4.$$
$$(- 12) + (+ 8) = - 12 + 8 = - 4.$$

Sind mehr als zwei Summanden gegeben, so bringe man selbe durch Addition der mit gleichen Zeichen versehenen Glieder auf zwei (einen positiven und negativen) zurück, und verfahre, wie so eben gezeigt wurde:

$$+ 7 - 6 + 5 - 9 + 10 - 3 + 8$$
$$= 7 + 5 + 10 + 8 - 6 - 9 - 3 = + 30 - 18 = + 12.$$

16.

Bei der Subtraction haben wir folgende vier Fälle:

$(+ 15) - (+ 8) = + 7$, weil $+ 7 + 8 = + 15.$
$(- 15) - (- 8) = - 7 \quad - 7 - 8 = - 15.$
$(- 15) - (+ 8) = - 23 \quad - 23 + 8 = - 15.$
$(+ 15) - (- 8) = + 23 \quad + 23 - 8 = + 15.$

Denn die Subtraction sucht eine Zahl, welche zum Subtrahend addirt, den Minuend gibt, oder was dasselbe ist, der Rest muß der Unterschied zwischen Minuend und Subtrahend sein. Wirklich ist aber $+ 15$ und $+ 8$ um $+ 7$, $- 15$ und $- 8$ um $- 7$, $- 15$ und $+ 8$ um $- 23$, und $+ 15$ und $- 8$ um $+ 23$ unterschieden, d. h. so viel Einheiten liegen jedesmal zwischen den zwei verglichenen Zahlen.

Um diese vier Fälle für die Ausübung bequemer zu machen, kann man auch, da eine Größe von einer andern abziehen, so viel heißt, als ihr Gegentheil addiren, das Gegentheil einer Größe aber durch die Veränderung ihres Zeichens dargestellt wird, sagen:

Man ändere im Subtrahend die Zeichen, und addire.

$$(+ 15) - (+ 8) = + 15 - 8 = + 7.$$
$$(- 15) - (- 8) = - 15 + 8 = - 7.$$
$$(- 15) - (+ 8) = - 15 - 8 = - 23.$$
$$(+ 15) - (- 8) = + 15 + 8 = + 23.$$

Einen mehrgliedrigen Minuend, oder Subtrahend, bringe man zuerst wieder auf einen eingliedrigen zurück.

17.

Bei der Multiplication sind wieder vier Fälle möglich, und zwar ist

$(+4) \times (+3) = +12.$
$(-4) \times (+3) = -12.$
$(+4) \times (-3) = -12.$
$(-4) \times (-3) = +12.$

Denn $(+4) \times (+3)$ heißt, man soll $+4$ dreimal nehmen: $+4+4+4$, was also $+12$ ist.

$(-4) \times (+3)$ heißt, man soll -4 dreimal nehmen, daher $(-4)+(-4)+(-4) = -12$.

$(+4) \times (-3)$ heißt, man soll die Zahl $+4$ dreimal, aber nicht, wie sie ist, sondern auf entgegengesetzte Art nehmen; nun ist das Gegentheil von $+4+4+4$ nichts anders, als $-4-4-4 = -12$; mithin $(+4) \times (-3) = -12$.

Ebenso muß $(-4) \times (-3) = +12$ sein, da $(-4) \times (-3)$ heißt, man soll von (-4) das Gegentheil $(+4)$ dreimal nehmen, woraus $+12$ hervorgeht.

Es fallen demnach diese vier Fälle unter die allgemeine Regel: Gleiche Zeichen geben ein positives, ungleiche ein negatives Produkt.

18.

Eben diese vier Fälle, hinsichtlich der Zeichen, bietet die Division dar. Da aber nach §. 13 der Divisor mit dem Quotient multiplicirt jedesmal den Dividend geben muß, so erhält man

$(+12) : (+3) = +4$; denn $(+3) \times (+4) = +12.$
$(-12) : (+3) = -4$ $(-4) \times (+3) = -12.$
$(+12) : (-3) = -4$ $(-4) \times (-3) = +12.$
$(-12) : (-3) = +4$ $(+4) \times (-3) = -12.$

Es ergibt sich hieraus ein ähnliches Gesetz für das Zeichen des Quotienten, nämlich:

Gleiche Zeichen im Dividend und Divisor geben einen positiven, ungleiche einen negativen Quotient.

Auch bei der Multiplication und Division können mehrere durch $+$ oder $-$ verbundene Glieder auf einen eingliedrigen Ausdruck vor der wirklichen Multiplication und Division reducirt werden.

Die Bezeichnung der Größen durch Buchstaben.

19.

Um Größen überhaupt anzugeben, ohne zu bestimmen, von welcher Mehrheit, bedient man sich der Buchstaben (meistens des lateini-

schen, seltener des griechischen, oder deutschen Alphabets). Die Rechnung mit diesen allgemeinen Zeichen ist daher keine besondere, sondern nur eine allgemeine Darstellung der arithmetischen Operationen.

Jeder Buchstabe kann jeden beliebigen Werth annehmen, den aber einmal ihm zugedachten behält er für die Dauer der Rechnung. Der Werth derselben hängt also weder von ihrer alphabetischen Ordnung, noch von ihrer Stellung gegen einander ab. Verschiedene Grösßen müssen auch mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet werden, und ein und derselbe Buchstabe kann in der nemlichen Rechnung nur einen Werth haben. Auch ist es Anfängern rathsam, wo möglich die Grösßen mit den Anfangsbuchstaben der zu bezeichnenden Gegenstände zu benennen, z. B. für Capital (c), Prozente (p) ꝛc.

Obwohl die Wahl der Buchstaben im Allgemeinen ganz willkürlich ist, so gewöhne man sich doch der Verständlichkeit wegen an den einmal allgemein angenommenen Gebrauch: Grösßen, welche als bekannt vorausgesetzt werden, mit den Anfangsbuchstaben a, b, c, d...., und noch unbekannte (erst zu suchende) mit den Endesbuchstaben des Alphabets (x, y, z, mit ersterem besonders, wenn nur eine unbekannte gesucht werden soll) zu bezeichnen.

Es schließt jedoch die Rechnung mit Buchstaben den Gebrauch der Zahlen nicht aus; denn soll eine allgemeine Grösße 2, 3, 4...., oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$mal ...., überhaupt öfter, oder theilweise genommen werden, so drückt man dieß kurz durch Vorsetzung einer Ziffer aus, z. B. 3a, 4b, 2c, welche Ziffer Coefficienten heißen. Auch diese Wiederholung einer allgemeinen Grösße könnte man wieder allgemein andeuten, wenn man statt 2, 3.... ebenfalls einen Buchstaben setzen würde. So würde ma so viel sein, als a mmal genommen. Daher erklären sich die Ausdrücke ab, cd, 3bf, cde, in welchen jedoch jeder Faktor als Coefficient betrachtet werden kann. Jede Grösße, der kein bestimmter Zahlencoefficient vorsteht, hat zum Coefficient 1, z. B. $ab = 1 . ab$.

Eben so bedient man sich der kürzern Bezeichnung wegen der Ziffer bei den Buchstaben, wenn ein Buchstabe ein- oder mehrmal mit der Einheit multiplicirt und in die Einheit dividirt werden soll. So stellt a^1 vor, daß a mit der Einheit einmal, a^2 zweimal, a^3 dreimal, a^m mmal multiplicirt, a^{-1}, daß mit a einmal in die Einheit, a^{-2} zweimal, a^{-3} dreimal, a^{-m} mmal dividirt sei. — Diese Zahlen

heißen Exponenten, und die ganzen Ausdrücke Potenzen, wovon ein eigener Abschnitt handelt.

Da jedoch jede Größe als ein Produkt der Einheit mit sich selbst ($7 = 1 \times 7$) betrachtet werden kann, so schreibt man den Exponent 1 nicht, der bei jeder als bekannt vorausgesetzt wird. — Die zweite Potenz heißt auch das Quadrat, die dritte der Cubus.

Sollen entgegengesetzte Größen allgemein bezeichnet werden, so dürfen sie nicht mit verschiedenen Buchstaben dargestellt, sondern ihr Gegensatz nur durch die Zeichen angedeutet werden. — Das Gegentheil von $+ a$ ist $- a$, daher auch $+ a$ und $- a = 0$.

Allgemeine Größen heißen gleichartig, wenn sie ohne Rücksicht auf ihre Coefficienten mit gleichen Buchstaben und gleichen Exponenten bezeichnet sind, $3a$ und $5a$, $9c^3$ und $5c^3$, $7ab$ und $9ab$, sonst ungleichartig: $5a$ und $7b$, $8a^3b$ und $9ab^2$.

Man nennt die Rechnung mit diesen allgemeinen Größen Buchstabenrechnung, ohne jedoch das Bedeutungsvolle dieser allgemeinen Größenlehre, wodurch die Arithmetik einen so hohen Grad von Vollkommenheit erreicht hat, auszudrücken. Vieta (1550—1603) und Harriot (1560—1621) führten den Gebrauch der Buchstaben ein.

20.

Ausdrücke, welche aus mehreren durch $+$ oder $-$ verbundenen Größen bestehen, heißen zusammengesetzt, ein zweigliedriger ein Binomium, $(3a - 2b)$, $(4c + 5d)$, dreigliedriger $(a + b - c)$ Trinomium, mehrgliedrige überhaupt Polynomia, während eine eintheilige Größe Monomium genannt wird, $3a^2$, $4bcd$. Eine mehrgliedrige Größe läßt sich als einfache behandeln, wenn sie in Klammern gesetzt wird, und als Exponent 1 erhält, z. B. $a^2 - b = (a^2 - b)^1$. Um anzuzeigen, daß eine mehrtheilige Größe zusammengehört, schließt man selbe in Klammern ( ). Der Gebrauch dieser Klammern bei zusammengesetzten Ausdrücken ist von höchster Wichtigkeit. Da die einzelnen Fälle ihrer Anwendung und Behandlung stets am treffenden Orte erklärt sind, so bemerke man nur vorläufig folgendes:

So oft mit einer mehrtheiligen Größe irgend eine Rechnungsart vorgenommen werden soll, muß selbe in Klammern gesetzt werden, damit man wisse, daß diese Rechnungsart sich auf alle Theile des Ausdruckes erstrecke. Erst nach dem wirklichen Vollzug der angezeigten arithmetischen Operation, oder, wenn durch das Weglassen der

Klammern keine Zweideutigkeit entstehen kann, dürfen selbe weggelassen werden.

Zwei Ausdrücke von einerlei Werth, durch das Gleichheitszeichen verbunden, heißen eine Gleichung, die durch das Zeichen verbundenen Ausdrücke die Seiten, und die einzelnen Theile der Seiten die Glieder. $7 + 5 = 8 + 4$, $c + d = m - n$.

Daher werden auch allzeit Angabe und Resultat einer Rechnung durch das Gleichheitszeichen verbunden. z. B. um anzugeben, daß 27 dividirt durch 3 neun sei, setzt man $\frac{27}{3} = 9$.

Die vier Rechnungsarten mit allgemeinen Größen.

Addition.

21.

Allgemeine Größen sind addirt, wenn sie durch das Additionszeichen verbunden sind. Nur gleichartige Glieder lassen sich in einen Ausdruck vereinigen, daher diese Vereinigung bei der Addition nichts Wesentliches, sondern nur etwas Zufälliges ist.

Soll zu a die Größe b (positiv oder negativ) addirt werden, so kann man immer statt des Zeichens der Addition das Qualitätszeichen der zu addirenden Größe zwischen a und b setzen. Man erhält demnach für

$(+ a) + (+ b) = a + b.$
$(+ a) + (- b) = a - b.$
$(- a) + (+ b) = - a + b.$
$(- a) + (- b) = - a - b = - (a + b).$

Deßgleichen ist $a + a = 2a$

$a + a + a = 3a$, mithin auch $2a + 3a = 5a$,

ebenso $7b^2c + 8b^2c = 15b^2c$ und $7ac - 5ac = 2ac$.

Gleichartige Größen mit gleichen Zeichen werden demnach addirt, wenn man ihre Coefficienten zusammenzählt, und die Buchstaben der einzelnen Glieder beibehält; bei verschiedenen Zeichen wird die kleinere von der größern abgezogen, und der Rest erhält das Zeichen der größern. Wenn mehrere Größen addirt werden sollen, stelle man die gleichartigen untereinander, und gleiche die Summe der positiven und negativen gegen einander aus.

$4(a + b) + 5(a + b) = 9(a + b)$.

$bd + cd = (b + c)d$.

$6ab - 4ad + 5bc + 9ac + 7bd - 8cd =$
$(6b - 4d + 9c)a + (5c + 7d)b - 8cd$

oder

$(9c - 4d)a + (6a + 7d)b + (5b - 8d)c$,

woraus hervorgeht, daß die Summe gegebener Größen sich manchmal auf mehrerlei Art darstellen läßt.

$7a - 5c - 7d + 8c + b + 2a - 10d + 9 - 13b - 4 =$
$7a - 13b - 5c - 7d + 9$
$2a + b + 8c - 10d - 4$

$9a - 12b + 3c - 17d + 5$.

Sind einzelne Summanden in Klammern eingeschlossen, so können diese Klammern ganz außer Acht gelassen werden.

$(a + b) + (a - b) = a + b + a - b = 2a$.

Anmerkung. Um sich von der Richtigkeit des Verfahrens bei einer Rechnung mit Buchstaben zu überzeugen, setze man statt der Buchstaben willkürlich gewählte Zahlen, so müssen die Resultate vollkommen übereinstimmen.

$12a - 3b - 7c + 3d - 2c + 8b - 3a - 9d + 5f$
$= 9a + 5b - 9c - 6d + 5f$.

$2a - b + c - 6b - 3c + 3d + 8a + b + 2a - b$
$+ c - 3a + 5b + 2d - 5a - 2d + 7c =$
$4a - 2b + 6c + 3d$.

$15a^2b - 8a^3 + 4a^2c - 7a^2b + 25a^2c - 19ab^3 + 24a^3$
$- 13a^2b - 45m^3 + 9ab^3 - 8a^2c + a^2b - a^3 + a^2c$
$= - 4a^2b + 15a^3 + 22a^2c - 10ab^3 - 45m^3$.

$3a - 2b - 3c + 27e - d + 5b - 8c + 3e - 7f$
$- a + 3b - 5f - c - 115d + 6e - 7a - 6b - 3a$
$+ 17c + 9d - 5c - 2d - 5e + 11f + 6e - 9f + m$
$= - 8a - 109d + 37e - 10f + m$.

$max^2 - na^3 + 8a^2x^3 - 12ax^3 - nax^2 + ma^3 - 6a^2x^3$
$+ cax^3 = (m - n)ax^2 + (m - n)a^3 + 2a^2x^3 + (c - 12)ax^3$.

Subtraction.

22.

Soll von einer Größe a eine andere b (positiv oder negativ) abgezogen werden, so wird die Subtraction vollzogen, wenn man den Subtrahend mit verändertem Qualitätszeichen beisetzt, und addirt.

$$a - (+b) = a - b$$
$$a - (-b) = a + b$$
$$5ab - (+2ab) = 5ab - 2ab = 3ab$$
$$10cd - (-7cd) = 10cd + 7cd = 17cd$$
$$(a + b) - (a - b) = a + b - a + b = 2b.$$

Sind Minuend und Subtrahend mehrgliedrig, so können beide, auf jeden Fall jedoch muß der Subtrahend in Klammern gesetzt werden. — Von $3a - b + 2c$ soll abgezogen werden $2a - 4b - 8c$, wird daher mathematisch dargestellt:

$$(3a - b + 2c) - (2a - 4b - 8c).$$

Nun stelle man, wie bei der Addition, die gleichartigen untereinander, wechsle im Subtrahend die Zeichen, und addire.

$$\begin{array}{r} 3a - b + 2c \\ 2a - 4b - 8c \\ - \quad + \quad + \\ \hline a + 3b + 10c \text{ Rest.} \end{array}$$

$$(4a^2c - 5b^2 + 7dc) - (8a^2c - 8dc) - (7a^2c + 5b^2)$$
$$= 4a^2c - 5b^2 + 7dc$$
$$+ \; 8a^2c + 5b^2 + 8dc$$
$$+ \; 7a^2c$$
$$\overline{-\,11a^2c - 10b^2 + 15dc.}$$

$$(16a^2 - 5ab + 3c^2) - (8a^2 - 6ab - (3a + c^2) + 5b^2)$$
$$= (16a^2 - 5ab + 3c^2) - (8a^2 - 6ab - 3a - c^2 + 5b^2)$$
$$= 16a^2 - 5ab + 3c^2 - 8a^2 + 6ab + 3a + c^2 - 5b^2$$
$$= 8a^2 + ab + 4c^2 + 3a - 5b^2.$$

Anmerkung. Sollen mehrere Größen von andern durch Klammern getrennt werden, so setze man vor die Klammern entweder das Zeichen +, und in die Klammern alle Größen mit den ihnen zugehörigen Zeichen, oder man stelle vor die Klammern — und in dieselben alle Größen mit entgegengesetzten Zeichen. Sollen z. B. in dem Ausdrucke $12a^2 - 6ab + 4c^2$

— 8d die drei letzten Glieder in Klammern zum ersten gesetzt werden, ohne jedoch den Werth des Ausdruckes zu ändern, so kann man entweder

$12a^2 + (-6ab + 4c^2 - 8d)$ oder

$12a^2 - (6ab - 4c^2 + 8d)$ setzen.

$(3a - 17b + 13a - 10b - 2a) - (6b - 8a - b - 2a + 3d + 9a - 5m) = 15a - 32b - 3d + 5m.$

$(3b^2 - 7a^3 - 4c^5) - (a^3 - b^2) - (-12a^3 + 3b^2 - 4c^5) = 4a^3 + b^2.$

$13a - (5c + 3f - (7a + 5x) + 3a) = 17a - 5c - 3f + 5x.$

$(mx^3 - nx^2y + pxy^2 - qx^2y^2 + 14y^3) - (nx^3 + 2nx^2y - qx^2y^2 - qxy^2 - 6y^3 - z^2 + 4yz) = (m - n)x^3 - 3nx^2y + (p + q)xy^2 + 20y^3 - 4yz + z^2.$

Multiplication.

23.

Schon oben wurde gezeigt, daß die Multiplication von a mit b dadurch angegeben wird, daß man die Buchstaben, ohne Zeichenverbindung, zusammenstellt.

$a \times b = ab$, ebenso $3a \times 5b = 3 . 5 . ab = 15ab.$

Führen demnach die Faktoren Zahlencoefficienten bei sich, so wird das Produkt derselben den Buchstaben vorgesetzt. Hieraus ergibt sich, daß ein Produkt multiplicirt wird, wenn man nur einen Faktor desselben multiplicirt. — Das Zeichen des Produktes wird jedesmal nach §. 17 bestimmt.

$a \times a = aa = a^2.$

$a \times a \times a = aaa = a^3.$

$a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5.$

$a^4 \times a^6 \times a^3 = a^{13}.$

d. h. Potenzen von gleichen Faktoren, oder Stammgrößen werden multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt:

$-a^m \times a^n = -a^{m+n}.$

$a^m \times a = a^{m+1}.$

$4(x^2 + y^3)^2 \times 3(x^2 + y^3)^5 = 12(x^2 + y^3)^7.$

Dasselbe Gesetz gilt auch, wenn die Exponenten negativ sind

$$a^4 \times a^{-2} = a^{4+(-2)} = a^{4-2} = a^2$$

und $a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1.$

d. h. jede Größe mit dem Exponent 0 ist der Einheit gleich; welche Sätze jedoch erst später strenger erwiesen werden sollen.

Besteht der Multiplicand aus mehreren, der Multiplicator aus einem Gliede, so müssen alle Theile des Multiplicands mit dem Multiplicator multiplicirt werden.

$$(4a^2b - 3ac^2 + 4cd^3) \times 5ac^2 =$$

$$\begin{array}{l} 4a^2b - 3ac^2 + 4cd^3 \\ 5ac^2 \\ \hline 20a^3bc^2 - 15a^2c^4 + 20ac^3d^3. \end{array}$$

Sind endlich Multiplicand und Multiplicator mehrgliedrig, so müssen alle Glieder des Multiplicators mit allen des Multiplicands multiplicirt werden. Kommen unter den erhaltenen Produkten gleichartige Größen vor, so pflegt man solche gewöhnlich zu vereinfachen.

Obwohl es eigentlich in Absicht auf das zu erhaltende Produkt ganz einerlei ist, in welcher Ordnung die Multiplikation vollzogen, und die einzelnen Produkte zusammengestellt werden, so ist doch gewöhnlich, und den Ueberblick allenfallsiger gleichartiger Produkte sehr erleichternd, die Glieder der Faktoren, wo es thunlich ist, nach den fallenden oder steigenden Potenzen irgend eines Buchstaben, zu ordnen, die hier angenommene Stellung der Partialprodukte zu befolgen, und die gleichartigen derselben zu addiren.

$$(6ab + 4a^2 - 3b^2) \times (5b^2 - 3ab + 6a^2)$$

wird nach den Potenzen von a geordnet

$$(4a^2 + 6ab - 3b^2) \times (6a^2 - 3ab + 5b^2)$$

und nach denen von b

$$(-3b^2 + 6ab + 4a^2) \times (5b^2 - 3ab + 6a^2) \text{ heißen.}$$

$$\begin{array}{l} 4a^2 + 6ab - 3b^2 \\ 6a^2 - 3ab + 5b^2 \\ \hline 24a^4 + 36a^3b - 18a^2b^2 \\ \quad - 12a^3b - 18a^2b^2 + 9ab^3 \\ \quad\quad + 20a^2b^2 + 30ab^3 - 15b^4 \\ \hline 24a^4 + 24a^3b - 16a^2b^2 + 39ab^3 - 15b^4. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\ 3b^2 + 6ab + 4a^2 \\ 5b^2 - 3ab + 6a^2 \\ \hline -\ 15b^4 + 30ab^3 + 20a^2b^2 \\ +\ 9ab^3 - 18a^2b^2 - 12a^3b \\ -\ 18a^2b^2 + 36a^3b + 24a^4 \\ \hline -\ 15b^4 + 39ab^3 - 16a^2b^2 + 24a^3b + 24a^4. \end{array}$$

In beiden Fällen gleiche Produkte.

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2.$$
$$(a^m + b^m) \times (a^m - b^m) = a^{2m} - b^{2m}.$$

d. h. die Summe zweier Zahlen, multiplicirt mit ihrer Differenz, gibt die Differenz der Quadrate der gegebenen Zahlen.

$(x + y)^3 c^4 d^3 \times (x + y)^4 c^{-2} d \times (x + y) d^{-2} = (x + y)^8 c^2 d^2.$

$(a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4) \times (a + 2b) = a^5 + 32b^5.$

$(1 + x - x^5 - x^6) \times (1 - x + x^2 - x^3 + x^4) = 1 - x^{10}.$

$(3x^{-2}y^{-7} - 2x^2y^{-5} + 8x^6y^{-3}) \times (2x^{-3}y^{-5} + 6xy^{-3} + 12x^5y^{-1}) = 6x^{-5}y^{-12} + 14x^{-1}y^{-10} + 40x^3y^{-8} + 24x^7y^{-6} + 96x^{11}y^{-4}.$

$(x^2 + 2x - 1)(2x^2 - 3x + 1)(x - 3) = 2x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 16x + 3.$

Division.

24.

Nach §. 13 ist $a : a$, $a^2b : a^2b$, überhaupt jede Größe durch sich selbst dividirt $= 1$.

Daraus folgt, daß $ab : a = b$.

$acd : ad = c$, $12a^2b^3c : 6a^2c = 2b^3$.

Sind daher eintheilige Größen zu dividiren, so braucht man nur die gleichen Buchstaben im Dividend und Divisor wegzulassen, und die allenfallsigen Coefficienten in einander zu dividiren. Das Zeichen des Quotienten wird nach §. 18 bestimmt.

$a^5 : a^2 = aaaaa : aa = aaa = a^3.$

$a^7 : a^3 = aaaaaaa : aaa = aaaa = a^4.$

d. h. Potenzen von einerlei Buchstaben werden dividirt, wenn man vom Exponent des Dividends den des Divisors abzieht.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

$$a^m : a = a^{m-1}.$$

$$6a^4b^3c^2 : 3a^3bc^2 = 2ab^2.$$

$$12(x^3 + y^3)^4 : 3(x^3 + y^3)^2 = 4(x^3 + y^3)^2,$$

dasselbe gilt wieder von negativen Exponenten

$$a^{+3} : a^{-2} = a^{3-(-2)} = a^{3+2} = a^5.$$

$$a^{-5} : a^{-3} = a^{-5-(-3)} = a^{-5+3} = a^{-2}.$$

$$15a^{-3}b^4c^2 : -5a^2b^{-2}c^3 = -3a^{-5}b^6c^{-1}.$$

Besteht aber Dividend und Divisor zum Theil, oder ganz aus verschiedenen Buchstaben, oder nicht theilbaren Zahlencoefficienten, so können selbe nur durch das Divisionszeichen getrennt werden.

$$3abc : 4ad = 3bc : 4d \text{ oder } \frac{3bc}{4d}.$$

$$7ab : 9cd = 7ab : 9cd \text{ oder } \frac{7ab}{9cd}.$$

Ist der Dividend mehrgliedrig und der Divisor eingliedrig, so theile man jedes Glied des Dividends durch den Divisor:

$$(36a^2c^3 - 18ac^4b + 12ab^2c) : 6ac = 6ac^2 - 3c^3b + 2b^2.$$

Sind Dividend und Divisor mehrgliedrig, so ordne man (ganz dem Verfahren bei der Division mit Zahlen ähnlich), die Glieder des Dividends und Divisors nach den höchsten Potenzen gemeinschaftlicher Buchstaben, dividire dann mit dem ersten Glied des Divisors in das des Dividends, welches den ersten Theil des Quotienten gibt. Diesen Quotient multiplicire man mit dem ganzen Divisor, und ziehe dieß Produkt vom Dividend ab. — Zu dem Reste setze man eines oder mehrere Glieder des Dividends herab, und wiederhole das ganze Verfahren so lange, bis die Division aufgeht, oder bis man sieht, daß selbe nicht aufgehen kann. Die einzelnen erhaltenen Quotienten geben zusammengestellt den ganzen Quotient, z. B.

$(4a^3b + 2b^4 - 9a^2b^2 + 6a^4 - 3ab^3)$ soll durch $(2ab + 2a^2 - b^2)$ getheilt werden.

Es können hiebei Dividend und Divisor wieder nach den Potenzen von a und b geordnet werden, und man erhält entweder

$$(6a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4) : (2a^2 + 2ab - b^2)$$

oder

$$(2b^4 - 3ab^3 - 9a^2b^2 + 4a^3b + 6a^4) : (-b^2 + 2ab + 2a^2).$$

$(6a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4) : (2a^2 + 2ab - b^2) = 3a^2 - ab - 2b^2$

$6a^4 + 6a^3b - 3a^2b^2$

$- \quad - \quad +$

$\quad\quad - 2a^3b - 6a^2b^2 - 3ab^3$

$\quad\quad - 2a^3b - 2a^2b^2 + ab^3$

$\quad\quad + \quad + \quad -$

$\quad\quad\quad - 4a^2b^2 - 4ab^3 + 2b^4$

$\quad\quad\quad - 4a^2b^2 - 4ab^3 + 2b^4$

$\quad\quad\quad + \quad + \quad -$

$(2b^4 - 3ab^3 - 9a^2b^2 + 4a^3b + 6a^4) : (-b^2 + 2ab + 2a^2) = -2b^2 - ab + 3a^2$

$2b^4 - 4ab^3 - 4a^2b^2$

$- \quad + \quad +$

$\quad\quad ab^3 - 5a^2b^2 + 4a^3b$

$\quad\quad ab^3 - 2a^2b^2 - 2a^3b$

$\quad\quad - \quad + \quad +$

$\quad\quad\quad - 3a^2b^2 + 6a^3b + 6a^4$

$\quad\quad\quad - 3a^2b^2 + 6a^3b + 6a^4$

$\quad\quad\quad + \quad - \quad -$

In beiden Fällen gleiche Quotienten.

$(a^5 - b^5) : (a - b) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$

$a^5 - a^4b$

$- \quad +$

$\quad a^4b - b^5$

$\quad a^4b - a^3b^2$

$\quad - \quad +$

$\quad\quad a^3b^2 - b^5$

$\quad\quad a^3b^2 - a^2b^3$

$\quad\quad - \quad +$

$\quad\quad\quad a^2b^3 - ab^4$

$\quad\quad\quad - \quad +$

$\quad\quad\quad\quad ab^4 - b^5$

$\quad\quad\quad\quad ab^4 - b^5$

$\quad\quad\quad\quad - \quad +$

Die Differenz gleicher Potenzen zweier Größen ist immer durch die Differenz der Größen selbst theilbar, $(x^m - y^m)$ ist stets durch $(x-y)$, deßgleichen $(x^{2m} - y^{2m})$ durch $(x+y)$ und $(x^{2m-1} + y^{2m-1})$ durch $(x+y)$ theilbar.

$(16x^6 + 7x^4 - 2x^2 - 1) : (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1.$

$(64x^6 - 1) : (32x^5 - 16x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 2x - 1) = 2x + 1.$

$(5x^5y^3z^5 - 22x^4y^3z^6 + 5x^3y^3z^7 + 12x^2y^3z^8 - 7x^2y^2z^8 + 28xy^2z^9) : (x^2yz^2 - 4xyz^3) = 5x^3y^2z^3 - 2x^2y^2z^4 - 3xy^2z^5 - 7yz^6.$

$(32x^5y^{10} + 240x^4y^8 + 520x^3y^6 + 780x^2y^4 + 810xy^2 + 243) : (4x^2y^4 + 2xy^2 + 9) = 8x^3y^6 + 56x^2y^4 + 84xy^2 + 27.$

$(78p^{-8}q^3 - 174p^{-5}q^4 - 295p^{-2}q^5 + 2pq^6 + 28p^4q^7) : (6p^{-3}q^2 - 18q^3 - 7p^3q^4) = 13p^{-5}q + 10p^{-2}q^2 - 4pq^3.$

Von der Theilbarkeit der Größen.

25.

Die Multiplication und Division überzeugen uns, daß die meisten Zahlen zusammengesetzt sind, da wir bald durch Multiplication neue Zahlen entstehen lassen, bald durch Division Zahlen in mehrere zerfällen.

Jede Größe aber, mit der sich in eine andere ohne Rest theilen läßt, heißt ihr Maaß.

Dagegen gibt es wieder Zahlen, welche nicht durch Multiplication zweier, oder mehrerer ganzen Zahlen entstehen, und daher auch nicht durch Division in ganze Zahlen zerlegt werden können, außer durch 1, und die Zahl selbst.

Letztere heißen Primzahlen — Stammzahlen — einfache Zahlen —, erstere zusammengesetzte.

Bei weitem der größere Theil der Zahlen ist zusammengesetzt, wie aus nachstehender Tafel, welche die Primzahlen der natürlichen Zahlen von 1 — 1000 enthält, zu ersehen ist.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53,
59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113,
127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181,
191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251,

257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317,
331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397,
401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463,
467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557,
563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619,
631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701,
709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787,
797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863,
877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953,
967, 971, 977, 983, 991, 997.

26.

Eine Zahl, die durch 2 theilbar ist, heißt eine gerade, jede durch 2 nicht theilbare Zahl, ungerade.

Der allgemeine Ausdruck jeder geraden Zahl ist $2n$, jeder ungeraden $2n - 1$, wo man für n nur die natürlichen Zahlen zu setzen hat.

Die vorzüglichsten Eigenschaften der geraden und ungeraden Zahlen sind folgende:

1) Summe und Differenz zweier geraden und ungeraden Zahlen ist gerade, denn stellen $2m$ und $2n$ zwei gerade, $2m - 1$ und $2n - 1$ zwei ungerade Zahlen vor, so ist

$$2m + 2n = 2(m + n).$$

$$(2m - 1) + (2n - 1) = 2m + 2n - 2 = 2(m + n - 1).$$

$$2m - 2n = 2(m - n).$$

$$(2m - 1) - (2n - 1) = 2m - 2n = 2(m - n).$$

Dagegen ist Summe und Differenz einer geraden und ungeraden Zahl stets ungerade.

2) Das Produkt von geraden ist wieder gerade, das zweier ungeraden Zahlen aber ungerade, und das einer geraden und einer ungeraden ebenfalls gerade.

$$2m \times 2n = 4mn.$$

$$(2m - 1) \times (2n - 1) = 4mn - 2n - 2m + 1.$$
$$= 2(2mn - n - m) + 1.$$

$$2m \times (2n - 1) = 4mn - 2m = 2(2mn - m).$$

3) Geht die Division gerader und ungerader Zahlen auf, so ist der Quotient

a) einer geraden Zahl in eine gerade entweder gerade, oder ungerade,

b) einer ungeraden in eine ungerade nur ungerade, und
c) einer ungeraden in eine gerade nur gerade.

Eine ungerade Zahl läßt sich durch eine gerade nie dividiren.

Nur die Primzahl 2 gehört noch zu den geraden, alle übrigen Primzahlen sind ungerade, und alle geraden Zahlen sind zusammengesetzt, aber nicht umgekehrt.

Es ist keine allgemeine Form bekannt, wodurch die Primzahlen vor den zusammengesetzten sich auszeichneten, oder kennbar wären, auch gibt es kein Gesetz für ihre Folge.

27.

Jede Zahl, die nicht Primzahl ist, läßt sich in Primzahlen zerlegen, welche dann ihre einfachen Faktoren genannt werden.

Soll eine Zahl in ihre einfachen Faktoren aufgelöst werden, so dividire man mit den Primzahlen, von vorn angefangen, so lange in die gegebene Zahl, bis keine weitere Division möglich ist, z. B. man suche die einfachen Faktoren von 210.

$$210 = 2 \cdot 105$$
$$105 = 3 \cdot 35$$
$$35 = 5 \cdot 7$$
$$\text{also } 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$
$$2310 = 2 \cdot 1155$$
$$1155 = 3 \cdot 385$$
$$385 = 5 \cdot 77$$
$$77 = 7 \cdot 11.$$
$$\text{hiemit } 2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Es sind also 2, 3, 5 und 7 die einfachen Faktoren von 210, und 2, 3, 5, 7 und 11 die von 2310.

Hat man die Division einer Zahl durch die aufeinander folgenden Primzahlen so lange fortgesetzt, bis der erhaltene Quotient kleiner, als der Divisor ist, und ist die Theilung noch nicht ohne Rest möglich gewesen, so ist die untersuchte Zahl Primzahl, z. B. 131 ist nicht durch 2, 3, 5, 7 und 11 theilbar, und gibt durch 13 dividirt, $10\frac{1}{3}$. Da nun der Quotient $10\frac{1}{3}$ kleiner, als der Divisor 13 ist, 131 aber zwischen 13 und $13 \times 13 = 169$ liegt, und durch keine kleinere Primzahl, als 13, theilbar ist, so muß 131 selbst Primzahl sein.

Wesentliche Dienste bei der Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren leisten die äußern Kennzeichen der Theilbarkeit durch die ganzen Zahlen von 2 bis 11.

Durch 2, 4, 8 ist jede Zahl theilbar, wenn 2 in der letzten Ziffer, 4 in der durch die beiden letzten, 8 in der durch die 3 letzten Ziffer dargestellten Zahl aufgeht, so ist 142, 198 durch 2; 104, 164 durch 4, 16024, 17112 durch 8 theilbar.

Durch 5 kann jede Zahl getheilt werden, deren Endziffer 5, oder 0, z. B. 115, 1290, und durch 10, wenn die letzte Ziffer 0 ist, und zwar so oft, als die Zahl 0 zu Ende hat.

Durch 3 und 9 kann in jede Zahl ohne Rest getheilt werden, deren Ziffersumme durch 3 und 9 theilbar ist, z. B. 10011, 627, 777 sind durch 3; 1863, 8001, 907218 durch 9 theilbar.

Jede gerade Zahl, die durch 3 theilbar ist, ist es auch durch 6, z. B. 102, 780 ꝛc.

Zur Theilbarkeit mit 7 bietet die äußere Form der Zahlen kein Kennzeichen dar, welches der unmittelbaren Division vorzuziehen wäre.

Die Theilbarkeit einer Zahl durch 11 erhellet daraus, wenn der Unterschied zwischen den Summen der Ziffer an den geraden und ungeraden Stellen entweder 0, oder eine durch 11 theilbare Zahl ist.

z. B. $\overset{5\,4\,3\,2\,1}{15752} \cdot (2 + 7 + 1) - (5 + 5) = 0$;

also 15752 durch 11 theilbar.

$91916 \cdot (6 + 9 + 9) - (1 + 1) = 22$, daher

91916 ebenfalls durch 11 theilbar.

Eine Zahl, deren letzten Ziffer 25, 50, 75 oder 00 sind, ist stets durch 25 theilbar.

Hat eine Zahl überhaupt die Eigenschaft, sich von mehreren relativen Primzahlen ohne Rest theilen zu lassen, so läßt sie sich auch durch ihr Produkt theilen, z. B. 2112 ist durch 3 und 8 theilbar, daher auch durch $3 \times 8 = 24$.

28.

Die einfachen Faktoren allgemeiner eintheiliger Größen sind die einzelnen Buchstaben. Allenfallsige Coefficienten richten sich nach den bisherigen Regeln. Von 35abc sind 5, 7, a, b, c, und von $72a^3d^4f^5$ die einfachen Faktoren 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . aaadddfffff.

Von weit größerer Schwierigkeit, jedoch aber von sehr großem Vortheil ist das Zerfällen zusammengesetzter (complexer) Größen.

Gesetze, wornach diese Arbeit vollzogen wird, gibt es, insbesondere zur Auffindung zusammengesetzter Faktoren im Allgemeinen nicht, sondern es beruht meistens auf eigener Erfindung, und glücklichem Erra=

then. Es ist daher sehr nützlich, jeden vorkommenden Fall dem Gedächtnisse möglichst einzuprägen, und vorzüglich bei der Multiplication die aus zusammengesetzten Faktoren entstandenen Produkte genau zu betrachten, um sie mit complexen Ausdrücken vergleichen zu können.

Nachstehende Beispiele können in vielen Fällen zur Richtschnur dienen:

$3a^2x^3 - 6ax^4 + 24a^2bx = (ax^2 - 2x^3 + 8ab)\,3ax.$

$10a^{m+n}cd^{n+2} - 14a^n b^m c^2 d^{n+2} = (5a^m - 7b^m c)\,2a^n cd^{n+2}.$

$6x^2y - 18x^3y^{m+1} = (1 - 3xy^m)\,6x^2y.$

$x^{2m} \pm 2x^m y^m + y^{2m} = (x^m \pm y^m)\,(x^m \pm y^m).$

$x^2 - 1 = (x + 1)\,(x - 1).$

$x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 + 1)(x^2 - 1) =$
$x(x + 1)\,(x - 1)\,(x^2 + 1).$

$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = (x + y)^2 - z^2,$

welcher Ausdruck als die Differenz zweier Quadrate

$= (x + y + z)\,(x + y - z).$

Auf ähnliche Weise:

$2xy - x^2 - y^2 + z^2 = z^2 - (x^2 - 2xy + y^2)$
$= z^2 - (x - y)^2 = (z + x - y)\,(z - x + y)$

daher

$2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4$
$= 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - z^4 - (x^4 - 2x^2y^2 + y^4)$
$= z^2(2x^2 + 2y^2) - z^4 - (x^2 - y^2)^2$
$= z^2(x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2) - z^4 - (x^2 - y^2)^2$
$= z^2[(x + y)^2 + (x - y)^2] - z^4 - (x + y)^2\,(x - y)^2$
$= z^2(x + y)^2 - z^4 - (x - y)^2\,(x + y)^2 + z^2(x - y)^2$
$= z^2[(x + y)^2 - z^2] - (x - y)^2\,[(x + y)^2 - z^2]$
$= [(x + y)^2 - z^2)\,.\,(z^2 - (x - y)^2]$
$= (x + y + z)\,(x + y - z)\,(z + x - y)\,(z - x + y).$

$ac + bc + ad + bd = c(a + b) + d(a + b) = (c + d)\,(a + b).$

$ad + bd - cd - ae - be + ce = d(a + b - c) - e(a + b - c)$
$= (d - e)\,(a + b - c).$

$a^m - b^m = (a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + b^{m-1})\,(a - b).$

Daher $a^4 - b^4 = (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)\,(a - b) = [a^2(a + b)$
$+ b^2(a + b)]\,(a - b) = (a^2 + b^2)\,(a + b)\,(a - b).$

oder $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)\,(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)\,(a + b)\,(a - b).$

$2b^3 + 3ab^2 + 3ab - 2b = b(2b^2 + 3ab + 3a - 2)$
$= b(2b^2 - 2 + 3ab + 3a) = b[2\,.\,(b^2 - 1) + 3a(b + 1)]$

$= b[2.(b+1)(b-1)+3a(b+1)] = b.(b+1)(2b-2+3a)$.

Um die allenfallsigen Faktoren von $3x^2 - x - 10$ ausfindig zu machen, zerlege man das letzte Glied (10) in seine Faktoren, und sehe nach, ob der Ausdruck $= 0$ wird, wenn man für x die Faktoren (positiv und negativ) von 10 nach einander substituirt. Hat sich ein solcher gefunden, so ist x weniger diesem Faktor ein zusammengesetzter Faktor des Ausdruckes. So hat in $3x^2 - x - 10$ die Zahl 2 die Eigenschaft, den Ausdruck gleich 0 zu machen, daher $x - 2$ ein Faktor, und wirklich ist $3x^2 - x - 10 = (3x + 5)(x - 2)$.

Man habe $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.

Die Faktoren von 24 sind $\pm(1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24)$, von denen $+2$ den Ausdruck auf 0 bringt, daher $x - 2$ ein zusammengesetzter Faktor, und

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x^2 - x - 12)(x - 2).$$

Um zu erfahren, ob auch noch $x^2 - x - 12$ zerlegt werden könne, wiederhole man das Verfahren, und wenn man nach einander die Faktoren von 12 positiv und negativ substituirt, findet man, daß -3 dem Ausdruck genüge, daher $x + 3$ Faktor, und

$$x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4).$$

also

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 2)(x + 3)(x - 4).$$

Der Ausdruck $x^5 - x^4 - x + 1$ wird $= 0$, wenn $x = 1$ substituirt wird, also ist $x - 1$ Faktor, und $x^5 - x^4 - x + 1$ wird gleich $(x - 1)(x^4 - 1)$.

$x^4 - 1$ aber ist als Differenz zweier Quadrate $= (x^2 + 1)(x^2 - 1)$, und $x^2 - 1$ aus demselben Grunde abermal $= (x + 1)(x - 1)$. Daher $x^5 - x^4 - x + 1 = (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$.

Schöne, aber nicht selten sehr weitläufige, und schwierig zu erkennende Beispiele von Zerfällungen gewährt die Division zusammengesetzter Größen, und die Auflösung der höhern Gleichungen.

29.

Bildet man zu den einfachen Faktoren noch alle möglichen Produkte aus denselben, und fügt noch die Einheit und die Zahl selbst hinzu, so findet man die Anzahl aller möglichen (einfachen und zusammengesetzten) Faktoren gegebener Größen. So sind die einfachen Faktoren von $105 = 3, 5, 7$. Aus diesen aber lassen sich noch 15, 21, 35 bilden, daher, mit Beifügung der Einheit und der gegebenen

Zahl (105) selbst, 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105 Divisoren von 105 sind.

Eben so sind von 3ab die einfachen Faktoren 3, a und b, die zusammengesetzten 3a, 3b und ab, daher 1, 3, a, b, 3a, 3b, ab und 3ab die Theiler der gegebenen Größe.

Da aber die Bildung dieser sämmtlichen Divisoren auch bei einer nicht großen Anzahl einfacher Faktoren ziemlich mühsam ist, und sehr leicht einzelne Produkte übergangen werden könnten, so bediene man sich folgenden Verfahrens: Man verbinde alle einfachen Faktoren mit der Einheit durch das Additionszeichen, und multiplicire alle diese Summen mit einander. So waren oben von 105 die einfachen Faktoren 3, 5 und 7 und daher $(1 + 3)\ (1 + 5)\ (1 + 7) =$
$= 1, 3, 5, 15, 7, 21, 35$ und 105 die möglichen Theiler, wie oben.

Ebenso die Theiler von 3ab
$(1 + 3)\ (1 + a)\ (1 + b) = 1, 3, a, 3a, b, 3b, ab$ und 3ab.

Kommen gleiche Faktoren vor, so bildet man gleich die aus denselben möglichen Potenzen, z. B. die einfachen Faktoren von 540 sind 2, 2, 3, 3, 3, 5, und alle Theiler sind daher durch den Ausdruck

$$(1 + 2 + 4)\ (1 + 3 + 9 + 27)\ (1 + 5)$$
$$= 1 + 2 + 4 + 3 + 6 + 12 + 9 + 18 + 36 + 27 + 54 + 108$$
$$+ 5 + 10 + 20 + 15 + 30 + 60 + 45 + 90 + 180 + 135$$
$$+ 270 + 540$$ gegeben.

Sind allgemein a, b, c ꝛc. die einfachen Faktoren einer gegebenen Größe, und m, n und p... ihre Exponenten, d. h. die Anzeiger, wie oft die einfachen Faktoren vorhanden sind, so drückt

$$(m + 1)\ (n + 1)\ (p + 1) \ldots .$$

die Anzahl aller Theiler aus, mit Einschluß der Einheit.

Soll daher eine Zahl gefunden werden, welche eine bestimmte Anzahl Theiler (m) hat, so zerfälle man m in beliebige Faktoren, so werden die um 1 verminderten Faktoren Exponenten der Faktoren der zu suchenden Zahl, z. B. eine Zahl mit 30 Theiler.

Als Faktoren von 30 nehme man z. B. 2, 3, 5, also hat der Ausdruck ab^2c^4 die 30 Theiler, wenn a, b und c was immer für 3 ungleiche Primzahlen sind.

Der größte aller Theiler einer gegebenen Größe ist daher immer das Produkt aller einfachen Theiler mit Hinweglassung des kleinsten.

Zugleich erhält man durch diese Darstellung die Summe aller Theiler.

30.

Eine Größe, die zwei oder mehrere andere zugleich theilt, heißt ihr gemeinschaftliches Maaß, oder Theiler.

Die gemeinschaftlichen einfachen Theiler gegebener Größen findet man, wenn man selbe in ihre einfache Faktoren auflöst. z. B.

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$
$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

also sind die gemeinschaftlichen einfachen Theiler von 30 und 40 die Zahlen 2 und 5,

$$12a^2bc^3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c.$$
$$70ab^2cd = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot d.$$

daher 2, a, b, c gemeinschaftliche einfache Theiler.

Größen, die keine gemeinschaftliche Faktoren haben, heißen einfache Größen unter sich (relativ einfache), und sind es Zahlen, relative Primzahlen, z. B. 3ab und 4cd, 9 und 20, 8 und 15.

Bildet man noch nach §. 29 aus den gemeinschaftlichen einfachen Theilern alle möglichen Produkte, so erhält man die einfachen und zusammengesetzten Theiler, von welchen der letzte, aus der Multiplication aller einfachen entstandene, der größte gemeinschaftliche Theiler heißt, z. B. 120 und 620.

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$
$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

haben 2, 2, 3, 5 als einfache Theiler gemeinschaftlich, und

$(1 + 2 + 4)(1 + 3)(1 + 5) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20,$ 30 und 60 als sämmtliche einfache und zusammengesetzte Theiler, wovon also 60 der größte gemeinschaftliche Theiler heißt.

Für 720, 450 und 630 sind

$$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$
$$450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$
$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

2, 3, 3 und 5 einfache, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 und 90 die sämmtlichen, und 90 der größte gemeinschaftliche Theiler.

Von $12a^3b^2c^5$ und $15a^2b^3cd^2$

$$12a^3b^2c^5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c.$$
$$15a^2b^3cd^2 = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot d \cdot d.$$

sind 3, a, a, b, b, c einfache

$$(1 + 3)(1 + a + a^2)(1 + b + b^2)(1 + c)$$
$$= 1, a, a^2, 3, 3a, 3a^2, b, ab, a^2b, 3b, 3ab, 3a^2b, b^2, ab^2, a^2b^2,$$

$3b^2$, $3ab^2$, $3a^2b^2$, c, ac, a^2c, 3c, 3ac, $3a^2c$, bc, abc, a^2bc, 3bc, 3abc, $3a^2bc$, b^2c, ab^2c, a^2b^2c, $3b^2c$, $3ab^2c$, $3a^2b^2c$ die sämmtlichen, und $3a^2b^2c$ der größte gemeinschaftliche Theiler.

Für größere, durch den bloßen Ueberblick nicht leicht mehr zerlegbare Zahlen, ist die Auffindung des größten gemeinschaftlichen Theilers auf folgende Weise weit vortheilhafter: Man dividire die größere der gegebenen durch die kleinere, geht die Division auf, so ist die kleinere selbst der größte gemeinschaftliche Theiler; geht aber die Division nicht auf, so wird selbe in der Art fortgesetzt, daß stets mit dem Reste in den vorigen Divisor getheilt wird.

In diesem Falle muß die Division einmal aufgehen, oder 1 als Rest bleiben. Die Zahl, womit die Division aufgegangen ist, ist der größte gemeinschaftliche Theiler. Bleibt aber 1 als Rest, so haben die Zahlen keinen andern Theiler, als 1. z. B. 65 und 546

65	546	8
	520	
26	65	2
	52	
13	26	2
	26	
	—	

also 13 der größte gemeinschaftliche Theiler.

Beweis. $546 = 8.65 + 26 = 520 + 26$

$65 = 2.26 + 13 = 52 + 13$

$26 = 2.13.$

also $546 = 8(52 + 13) + 26$

$= 8.2.2.13 + 8.13 + 2.13$

$= (8.2.2. + 8 + 2)13.$

und $65 = 2.26 + 13 = 2.2.13$

$= (2.2. + 1)13.$

Also beide Zahlen 546 und 65 durch 13 theilbar.

Soll für mehr als zwei Größen das größte gemeinschaftliche Maaß gefunden werden, so suche man selbes zuerst für die ersten beiden, hierauf für das bereits gefundene, und die dritte u. s. w.

z. B. für 702, 297 und 126.

Für 702 und 297 findet man 27; für 27 und 126 erhält man 9, daher 9 das größte gemeinschaftliche Maaß für alle 3.

Jeder gemeinschaftliche Theiler theilt auch Summen, Differenzen und Produkte der gegebenen Größen.

Denn sind A und B durch m theilbar, und zwar $A = mp$ und $B = mq$, so ist auch

$$A + B = mp + mq = (p + q)m.$$

und $$A - B = mp - mq = (p - q)m.$$

und $A \times B = mp \times mq = pqm^2$ ebenfalls eine ganze Zahl,

also auch $\frac{A \pm B}{m} = \frac{(p \pm q)m}{m} = p \pm q =$ einer ganzen Zahl.

31.

So wie für mehrere gegebene Größen der größte gemeinschaftliche Theiler verlangt werden kann, so kann auch die Frage nach einer Größe sein, welche die kleinste ist, die mehrere andere in sich ohne Rest enthält.

Man heißt selbe den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend.

Es sind dabei zwei Fälle möglich:

a) entweder sind die gegebenen Zahlen Primzahlen unter sich, und dann ist der kleinste gemeinschaftliche Dividend das Produkt aller einzelnen, z. B. für 3, 4, 5, 7 ist der kleinste gemeinschaftliche Dividend

$$3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420;$$

desgleichen für allgemeine Größen: z. B.

$$2ac,\ d^2,\ 3bf,\ 5mn = 30abcd^2fmn.$$

b) oder es sind die gegebenen Größen zum Theil, oder alle zusammengesetzt. In diesem Falle löse man alle Größen in ihre einfachen Faktoren auf, so ist das Produkt, welches man aus der Multiplication der höchsten Potenzen der einzelnen Faktoren erhält, der kleinste gemeinschaftliche Dividend, z. B. von 864, 1260, 1800

$$864 = 2.2.2.2.2.3.3.3 = 2^5.3^3$$
$$1260 = 2.2.3.3.5.7 = 2^2.3^2.5.7$$
$$1800 = 2.2.2.3.3.5.5 = 2^3.3^2.5^2$$

also $2^5.3^3.5^2.7 = 151200$.

Die Richtigkeit des Verfahrens erklärt sich ganz einfach daraus, daß alle niedern Potenzen einer Größe in den höhern enthalten sind.

Da allgemeinen Größen ihre Exponenten selbst beigesetzt sind, so ist für selbe das Auffinden des gemeinschaftlichen kleinsten Dividends sehr leicht, indem jede Größe mit dem höchsten Exponent der Dividend für alle gleichnamigen ist, z. B. für a^3b^2c, $a^5b^4d^2$, $a^4bc^3d^5$ erhält man $a^5b^4c^3d^5$.

Sind mehrere, und zumal große Zahlen gegeben, so kann man das Zerfällen der einzelnen in folgendes Verfahren umändern:

Man schreibt alle Zahlen in eine horizontale Linie, und dividirt der Ordnung nach mit den kleinsten Primzahlen in jene der gegebenen Zahlen, welche diese Division zulassen, und setzt diese Theilung so lange fort, als es möglich ist. So oft aber die Reihe durch dividirt wurde, setzt man den Divisor zur Seite. Zuletzt multiplicirt man alle nebenstehenden Divisoren, und die allenfalls übriggebliebenen Zahlen, (welche relative Primzahlen sind) mit einander, so gibt das Produkt ebenfalls den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend.

Große Erleichterung ist es, wenn man gleich jene Zahlen, die schon vorläufig als in andern enthalten gefunden werden, wegläßt.

Man habe die obigen Zahlen

2	864,	12600,	1800
2	432	6300	900
2	216	3150	450
3	108	1575	225
3	36	525	75
5	12	175	25
5	12	35	5
	12	7	1

also $2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 12 = 151200$ wie oben.

Besonders bequem ist dieses Verfahren bei vielen Zahlen, z. B.

3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 27, 30, 40, 60.

Da hiebei die Zahlen 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15 und 30 in den übrigen schon enthalten sind, so bleiben jene schon im voraus weg, und man behält demnach noch

2	18,	24,	27,	40,	60
2	9,	12,	27	20,	30
2	9	6	27	10	15
3	9	3	27	5	15
3	3	1	9	5	5
5	1	1	3	5	5
	1	1	3	1	1

Also $2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5 = 1080$

kleinster Dividend für alle obige Zahlen.

Für $3b^2$, $5a^2bc^2$, $7a^3b^2c^3$ ist $3 \times 5 \times 7a^3b^2c^3 = 105a^3b^2c^3$

kleinster gemeinschaftlicher Dividend.

2	$45a^3b^2c$,	$12(a^4 - b^2a^2)$,	$18(a^2 + ba)$,	$20(a^2b^3 - ab^4)$
2	45	6	9	10
3	45	3	9	5
3	15	1	3	5
5	5	1	1	5
$a + b$	1	1	1	1
$a - b$	a^3b^2c,	$a^2(a + b)(a - b)$,	$a(a + b)$,	$ab^3(a - b)$
	a^3b^2c	$a^2(a - b)$	a	$ab^3(a - b)$
	a^3b^2c	a^2	a	ab^3.

wofür a^3b^2c.

daher $2 . 2 . 3 . 3 . 5 . (a + b)(a - b)a^3b^2c =$
$= 180(a^5b^2c - a^3b^4c)$.

Da jede Größe in einem vielfachen derselben enthalten, die Zunahme aber unbegränzt ist, so ergibt sich, daß es keinen größten gemeinschaftlichen Dividend gibt.

Von den Brüchen.

32.

Sehr einfach führt uns die Division auf eine neue Art von Größen, deren nähere Betrachtung sehr wichtig ist.

Wenn nemlich die Division zweier Größen (einfacher oder zusammengesetzter) nicht vollzogen ist, so nennt man einen solchen Ausdruck der nicht vollzogenen Division einen Bruch, z. B.

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{9}{5}, \quad \frac{18-7}{15-5}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{ab}{c}, \quad \frac{c-a}{b+d} \text{ 2c.}$$

Ein Bruch besteht also allzeit aus zwei Gliedern, Dividend und Divisor.

Der Dividend gibt die Menge derjenigen Größe an, die getheilt werden soll, und heißt auch Zähler, der Divisor zeigt, in wie viele Theile der Dividend getheilt werden soll, und wird auch Nenner genannt.

Nach der Beschaffenheit der Nenner theilt man die Brüche in gemeine und künstliche, oder besondere. Erstere können jede beliebige Zahl zum Nenner haben, letztere aber haben nur bestimmte Zahlen als Nenner. So heißen z. B. Brüche, deren Nenner nur Potenzen der Zahl 10 sind, Decimalbrüche, solche, deren Nenner Potenzen von 60 sind, Sexagesimalbrüche. Ueber die sogenannten Kettenbrüche siehe weiter unten.

Ist keine Division der beiden Glieder möglich, welches statt findet, so oft der Zähler < als der Nenner ist, so heißt der Bruch ächt.

$\frac{3}{4}$, $\frac{13}{29}$, $\frac{a}{b}$, wenn $a < b$.

Ist eine Division möglich, sei es nun, daß der Zähler dem Nenner gleich, oder größer als der Nenner ist, so heißt der Bruch unächt $\frac{5}{5}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{c}{d}$, wenn $c > d$. Im ersten Falle ist der Bruch der Einheit gleich (§. 13), im zweiten größer, und man drückt hiebei häufig den Werth dadurch aus, daß man die Division, so weit es möglich ist, vollzieht, und den Rest als ächten Bruch beisetzt, z. B.

$$\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}, \quad \frac{ac+b}{c} = a + \frac{b}{c}.$$

Die Verbindung einer ganzen Zahl mit einem Bruch, heißt gemischte Zahl, $7\frac{5}{9}$, $a + \frac{c}{d}$.

Umgekehrt kann also auch jede gemischte Zahl in einen Bruch verwandelt werden, wenn man den Nenner mit der ganzen Zahl multiplicirt, und den Zähler zu diesem Produkte addirt, was man Brüche einrichten nennt, z. B. $5\frac{7}{8} = \frac{40+7}{8} = \frac{47}{8}$, $m + \frac{p}{q} = \frac{mq+p}{q}$.

33.

Brüche, deren Nenner gleich sind, heißen gleichartig, sonst ungleichartig.

Von Brüchen, welche gleiche Nenner haben, ist jener an Werth der größere, welcher den größern Zähler hat, und bei gleichen Zählern ist derjenige der größere, der den kleinern Nenner hat, und zwar so vielmal größer, um so vielmal sein Zähler größer, oder sein Nenner kleiner ist.

Wird daher der Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl multiplicirt, oder der Nenner dividirt, so wird der Bruch so vielmal größer, als die ganze Zahl beträgt, und wird der Nenner multiplicirt, oder der Zähler dividirt, so vielmal kleiner.

$\frac{5}{24} \times 4 = \frac{20}{24}$ und $\frac{5}{24:4} = \frac{5}{6}$ beide 4mal größer als $\frac{5}{24}$.

$\frac{15:3}{16} = \frac{5}{16}$, $\frac{15}{16 \times 3} = \frac{15}{48}$, beide 3mal kleiner als $\frac{15}{16}$.

Dagegen bleibt ein Bruch an Werth unverändert, wenn Zähler und Nenner mit ein und derselben Zahl multiplicirt, oder dividirt wird, da die Veränderungen des Zählers durch die des Nenners wieder aufgehoben werden.

$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$, $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} = \frac{ac}{bc}$, $\frac{15}{18} = \frac{15:3}{18:3} = \frac{5}{6}$.

$\frac{cd}{d^2} = \frac{cd:d}{d^2:d} = \frac{c}{d}$, $\frac{a^2 - ab}{a^3 - ac} = \frac{(a^2 - ab):a}{(a^3 - ac):a} = \frac{a - b}{a^2 - c}$.

Dem Gesagten zufolge ist also auch $\frac{an}{n} = a$; d. h. jede ganze Zahl läßt sich in einen Bruch von beliebigem Nenner verwandeln, und die einfachste Form ist $\frac{a}{1}$,

$$4 = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{4}{1} \text{ ꝛc.}$$

Dadurch, daß man Zähler und Nenner eines Bruches mit den gemeinschaftlichen Faktoren dividirt, wird die nicht selten sehr complicirte Form eines Bruches auf die einfachste zurückgeführt, was man das Verkleinern, oder Abkürzen nennt; so sind

$\frac{120}{480} = \frac{2.2.2.3.5}{2.2.2.2.2.3.5} = \frac{1}{2.2} = \frac{1}{4}$, $\frac{91}{143} = \frac{7.13}{11.13} = \frac{7}{11}$.

$\frac{12a^3b^2c}{15a^5bc^2} = \frac{2.2.3.aaabbc}{3.5.aaaaabcc} = \frac{2.2.b}{5aac} = \frac{4b}{5a^2c}$.

$\frac{ax + x^2}{3bx - cx} = \frac{(a + x)x}{(3b - c)x} = \frac{a + x}{3b - c}$.

$\frac{14a^2 - 7ab}{10ac - 5bc} = \frac{(2a - b)7a}{(2a - b)5c} = \frac{7a}{5c}$.

$\frac{5a^2 + 5ax}{a^2 - x^2} = \frac{5a(a + x)}{(a + x)(a - x)} = \frac{5a}{a - x}$.

$\frac{21x^3y^2z - 9xy^3z^2}{15x^2y^2z + 3x^5y^5z^2 - 12xy^2z} = \frac{7x^2 - 3yz}{5x + x^4y^3z - 4}$.

$\frac{5a^2 + 5ab}{a^2 - b^2} = \frac{5a}{a - b}$, $\frac{m^3 - n^3}{(m - n)^2} = \frac{m^2 + mn + n^2}{m - n}$.

$\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4x + 4} = \frac{x^2}{x - 2}$.

$$\frac{ax^m - bx^{m+1}}{a^2bx - b^3x^3} = \frac{x^{m-1}}{ab + b^2x}. \qquad \frac{2z^3 + 3z^2 + z}{z^3 - z^2 - 2z} = \frac{2z+1}{z-2}.$$

Ungleichartige Brüche können gleichartig gemacht werden.

Da nemlich Brüche an Werth unverändert bleiben, wenn man Zähler und Nenner mit ein und derselben Zahl multiplicirt, für die vorhandenen Divisoren aber (§. 31) eine Zahl gefunden werden kann, in welcher alle diese Nenner der Brüche enthalten sind, so ist es allzeit möglich, was immer für Brüchen gleiche Nenner zu verschaffen, was man Brüche unter gleiche Benennung bringen heißt. Ist nemlich der gemeinschaftliche Dividend gefunden, so dividirt man mit dem Nenner eines jeden Bruches in den gemeinschaftlichen Dividend, der jetzt gemeinschaftlicher, oder allgemeiner Nenner heißt, und multiplicirt mit diesem Quotient den Zähler, zu welchem Produkt der allgemeine Nenner als Nenner gehört. z. B. man soll die Brüche

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}$ und $\frac{9}{10}$ unter gleiche Benennung bringen.

Der gemeinschaftliche (kleinste) Dividend für 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10, ist 360, und

$360 : 2 = 180$, also $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 180}{2 \cdot 180} = \frac{180}{360}$

$360 : 3 = 120$ „ $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 120}{3 \cdot 120} = \frac{240}{360}$.

$360 : 4 = 90$ „ $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 90}{4 \cdot 90} = \frac{270}{360}$

$360 : 5 = 72$ „ $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 72}{5 \cdot 72} = \frac{288}{360}$

$360 : 6 = 60$ „ $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 60}{6 \cdot 60} = \frac{300}{360}$

$360 : 8 = 45$ „ $\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 45}{8 \cdot 45} = \frac{315}{360}$

$360 : 9 = 40$ „ $\frac{8}{9} = \frac{8 \cdot 40}{9 \cdot 40} = \frac{320}{360}$

$360 : 10 = 36$ „ $\frac{9}{10} = \frac{9 \cdot 36}{10 \cdot 36} = \frac{324}{360}$.

Dadurch, daß man gegebene Brüche auf gleiche Benennung bringt, sieht man zugleich, wie selbe an Werth auf einander folgen,

was in manchen Fällen nicht so leicht und schnell zu entscheiden ist, z. B. $\frac{3}{17}$ und $\frac{4}{23} = \frac{69}{391}$ und $\frac{68}{391}$, daher ist $\frac{3}{17}$ größer, und zwar um $\frac{1}{391}$.

Von $\frac{2a}{3bc}$, $\frac{5de}{8b^2c}$, $\frac{19c^2}{6bc^4}$, $\frac{15a^2b}{16c^3d^2}$ ist der allgemeine Nenner $48\,b^2c^4d^2$, und daher

$48\,b^2c^4d^2 : 3bc = 16\,bc^3d^2$; also

$$\frac{2a}{3bc} = \frac{2a \cdot 16\,bc^3d^2}{3bc \cdot 16\,bc^3d^2} = \frac{32\,abc^3d^2}{48\,b^2c^4d^2}.$$

$48\,b^2c^4d^2 : 8\,b^2c = 6\,c^3d^2$, also $\frac{5de}{8\,b^2c} = \frac{5de \cdot 6\,c^3d^2}{8b^2c \cdot 6c^3d^2} = \frac{30\,c^3d^3e}{48b^2c^4d^2}$.

$48b^2c^4d^2 : 6bc^4 = 8bd^2$, also $\frac{19c^2}{6bc^4} = \frac{19\,c^2 \cdot 8bd^2}{6bc^4 \cdot 8bd^2} = \frac{152\,bc^2d^2}{48\,b^2c^4d^2}$.

$48b^2c^4d^2 : 16c^3d^2 = 3b^2c$, also $\frac{15a^2b}{16c^3d^2} = \frac{15a^2b \cdot 3b^2c}{16c^3d^2 \cdot 3b^2c} = \frac{45\,a^2b^3c}{48b^2c^4d^2}$.

$$\frac{3a^2+2}{6\,a^3b}, \quad \frac{4-a^2}{5a^2b^3}, \quad \frac{15}{8\,abc^3}, \quad \frac{12+a}{a^4bd^2} = \frac{60a^3b^2c^3d^2 + 40ab^2c^3d^2}{120\,a^4b^3c^3d^2},$$

$$\frac{96\,a^2c^3d^2 - 24\,a^4c^3d^2}{120\,a^4b^3c^3d^2}, \quad \frac{225\,a^3b^2d^2}{120\,a^4b^3c^3d^2}, \quad \frac{1440\,b^2c^3 + 120ab^2c^3}{120\,a^4b^3c^3d^2}.$$

$$\frac{3m-n}{x-y}, \quad \frac{3x+2y}{15\,xy^2}, \quad \frac{5m+n}{12\,x^2y} = \frac{180\,mx^2y^2 - 60\,nx^2y^2}{60\,x^3y^2 - 60\,x^2y^3},$$

$$\frac{12x^3 - 4x^2y - 8xy^2}{60\,x^3y^2 - 60\,x^2y^3}, \quad \frac{25mxy - 25my^2 + 5nxy - 5ny^2}{60\,x^3y^2 - 60\,x^2y^3}.$$

$$\frac{2x-y}{6(x+y)}, \quad \frac{3x-y}{4(x-y)}, \quad \frac{xz-yz}{3(x^2-y^2)}, \quad \frac{4y}{x} = \frac{2(2x^3-3x^2y+xy^2)}{12\,x(x^2-y^2)},$$

$$\frac{3(3x^3+2x^2y-xy^2)}{12\,x(x^2-y^2)}, \quad \frac{4(x^2z-xyz)}{12\,x(x^2-y^2)}, \quad \frac{12(4x^2y-4y^3)}{12\,x(x^2-y^2)}.$$

In solchen Fällen ist es rathsamer, den gemeinschaftlichen Nenner (Dividend), in seine Faktoren zerlegt, anzugeben, um die jedesmalige Division mit den einzelnen Nennern zu ersparen; in dem gegebenen Beispiele würde man also sagen: $12\,x(x+y)(x-y)$.

Wenn man zum Zähler und Nenner eines ächten Bruches gleiches addirt, so wird dessen Werth vermehrt, und wenn man gleiches abzieht, vermindert. Bei unächten Brüchen findet das Gegentheil statt.

Beweis. Wenn $a < b$, so ist $\frac{a+x}{b+x} > \frac{a}{b}$ u. $\frac{a-x}{b-x} < \frac{a}{b}$.

Bringt man die beiden Brüche jedesmal unter gleiche Benennung, so ist

1) $\frac{a+x}{b+x}$, und $\frac{a}{b} = \frac{ab+bx}{b^2+bx}$, und $\frac{ab+ax}{b^2+bx}$.

Ist nun $a < b$, so ist $ab + bx > ab + ax$, also auch $\frac{ab+bx}{b^2+bx} > \frac{ab+ax}{b^2+bx}$, oder $\frac{a+x}{b+x} > \frac{a}{b}$.

2) $\frac{a-x}{b-x} < \frac{a}{b}$, denn unter gleiche Benennung gebracht, erhält man

$$\frac{ab-bx}{b^2-bx}, \text{ und } \frac{ab-ax}{b^2-bx}.$$

Wenn nun wieder $a < b$, so ist $ab - bx < ab - ax$, und daher $\frac{a-x}{b-x} < \frac{a}{b}$.

Addition.

34.

Gleichartige Brüche werden addirt, wenn man die Zähler derselben addirt, und den Nenner unverändert beisetzt. Ungleichartige werden zuerst unter einerlei Benennung gebracht. Um ganze Zahlen und Brüche zu addiren, kann man entweder die Brüche und die ganzen Zahlen für sich addiren, oder die ganzen Zahlen mit den Brüchen zuerst auf gleiche Benennung bringen.

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}, \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9} + \frac{9}{10} =$$

$$\frac{180 + 240 + 270 + 288 + 300 + 315 + 320 + 324}{360} =$$

$$\frac{2237}{360} = 6\frac{77}{360}.$$

$$5\frac{3}{4} + 7\frac{1}{2} + 4\frac{2}{5} = 5 + 7 + 4 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} =$$

$$= 16 + \frac{15}{20} + \frac{10}{20} + \frac{8}{20} = 16 + \frac{33}{20} = 16 + 1\frac{13}{20} = 17\frac{13}{20},$$

oder

$$5\frac{3}{4} + 7\frac{1}{2} + 4\frac{2}{5} = \frac{23}{4} + \frac{15}{2} + \frac{22}{5} = \frac{115}{20} + \frac{150}{20} + \frac{88}{20}$$

$$= \frac{353}{20} = 17\frac{13}{20}.$$

$$\frac{3a}{4b} + \frac{5b}{6a} + \frac{7a}{3b} + \frac{4b}{5a} = \frac{45a^2 + 50b^2 + 140a^2 + 48b^2}{60\,ab} = \frac{185a^2 + 98b^2}{60\,ab}.$$

$$\frac{2x - 3y}{6} + \frac{4x - 3y - 7}{4} + \frac{x - 3}{2} + \frac{2x + y}{8} = \frac{50x - 27y - 78}{24}.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a - 3b}{cd} + \frac{a^2 - b^2 - ab}{bcd} = \frac{acd - 4b^2 + a^2}{bcd}.$$

$$\frac{a}{b^n} + \frac{c}{b^{n-1}} + \frac{d}{b^{n-3}} = \frac{a + cb + b^3d}{b^n}.$$

Subtraction.

35.

Auch bei der Subtraction werden nur die Zähler gleichartiger Brüche subtrahirt, und der Nenner unverändert beibehalten, ungleichartige ebenfalls gleichartig gemacht.

Die verschiedene Beschaffenheit des Minuends und Subtrahends läßt jedoch manche Abkürzung hiebei zu, wie aus nachstehenden Beispielen zu ersehen ist.

$$\frac{5}{11} - \frac{3}{11} = \frac{5-3}{11} = \frac{2}{11}. \quad \frac{c}{d} - \frac{b}{d} = \frac{c-b}{d}. \quad \frac{3}{5} - \frac{5}{12}$$

$$= \frac{36 - 25}{60} = \frac{11}{60}.$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}. \quad 3 - \frac{4}{5} = \frac{15 - 4}{5} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}.$$

oder

$$3 - \frac{4}{5} = 2\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = 2\frac{5-4}{5} = 2\frac{1}{5}. \quad a^2c - \frac{bd}{c^2} = \frac{a^2c^3 - bd}{c^2}$$

$$3a - \frac{5a}{8} = \frac{24a - 5a}{8} = \frac{19a}{8}.$$

$$7 - 5\frac{3}{4} = 7 - \frac{23}{4} = \frac{28 - 23}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

oder $7 - 5\frac{3}{4} = 6\frac{4}{4} - 5\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$

$$4\frac{3}{5} - 2\frac{2}{7} = \frac{23}{5} - \frac{16}{7} = \frac{161 - 80}{35} = \frac{81}{35} = 2\frac{11}{35}$$

oder

$4\frac{3}{5} - 2\frac{2}{7} = 4 - 2 = 2$, und $\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{21 - 10}{35}$

$= \frac{11}{35}$; daher $2\frac{11}{35}$.

$$5\frac{3}{5} - 4 = \frac{28 - 20}{5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

oder $5\frac{3}{5} - 4 = 5 - 4 = 1$, dazu $\frac{3}{5} = 1\frac{3}{5}$.

$$\frac{(3a - 4b)}{5a^2} - \frac{(5a + 2b)}{8a^3} = \frac{(24a^2 - 32ab) - (25a + 10b)}{40\,a^3} =$$

$$\frac{24\,a^2 - 32\,ab - 25\,a - 10\,b}{40\,a^3}.$$

$$\left(3a - \frac{b}{c}\right) - \left(\frac{4b}{3} + 4c\right) = \frac{(9ac - 3b) - (4bc + 12c^2)}{3c}$$

$$\frac{9\,ac - 3\,b - 4\,bc - 12\,c^2}{3\,c}.$$

Nach dem bereits Gesagten wird es nicht schwer sein, nachstehende Ausdrücke zu ordnen:

$$3\frac{2}{3} - 5\frac{1}{8} + 7\frac{3}{4} - 5\frac{1}{2} + 10\frac{1}{6} = 10\frac{23}{24}$$

$$\frac{2a}{3b^2} - \frac{2d}{5bc^2} - p + \frac{5}{ab^2c^2} = \frac{10a^2c^2 - 6abd - 15ab^2c^2p + 75}{15\,ab^2c^2}.$$

$$\frac{a}{b+x} - \frac{c}{x} + \frac{3c}{4x} + 2b = \frac{8bx^2 + 8b^2x + 4ax - cx - bc}{4\,bx + 4\,x^2}.$$

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b}{a+b} - \frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{a^3 + ab^2 + b^3}{(a+b)^3}$$

$$\frac{3x - 4y}{7} - \frac{2x - y - z}{3} + \frac{15x - 4z}{12} = \frac{85x - 20y}{84}$$

$$\frac{m}{n} + \frac{m - 3n}{pq} + \frac{m^2 - n^2 - mn}{npq} = \frac{mpq - 4n^2 + m^2}{npq}$$

$$\frac{3}{4(1-x)^2}+\frac{3}{8(1-x)}+\frac{1}{8(1+x)}-\frac{1-x}{4(1+x^2)}=\frac{1+x+x^2}{1-x-x^4+x^5}$$

$$\frac{2a-b}{a+x}+\frac{(a-b)x}{a^2-x^2}-\frac{3a-b}{a-x}-\frac{4a}{x}=\frac{3a^2x+bx^2-4a^2}{a^2x-x^3}.$$

Multiplication.

36.

Bei der Multiplication eines Bruches mit einem Bruche wird Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt. Das erste Produkt gibt den neuen Zähler, das letztere den neuen Nenner. Gemischte Zahlen und Ganze werden in uneigentliche Brüche aufgelöst.

Denn einen Bruch mit einem andern multipliciren, heißt, vom ersten den so vielten Theil nehmen, als der andere angibt. z. B. $\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$ heißt von $\frac{3}{4}$ den 6ten Theil 5mal, oder, was dasselbe ist, von $\frac{5}{6}$ den 4ten Theil 3mal nehmen. Nun ist der 6te Theil von $\frac{3}{4}=\frac{3}{4.6}=\frac{3}{24}$, und $\frac{3}{24}$ 5mal genommen $=\frac{3\times5}{24}=\frac{15}{24}$ oder $\frac{5}{8}$; der 4te Theil von $\frac{5}{6}$ ist $\frac{5}{6\times4}=\frac{5}{24}$, welches 3mal genommen $\left(\frac{5}{24}\times3\right)=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$ gibt. $3\frac{4}{5}\times2\frac{1}{3}=\frac{19}{5}\times\frac{7}{3}=\frac{133}{15}=8\frac{13}{15}$, da $3\frac{4}{5}\times2\frac{1}{3}=\left(3+\frac{4}{5}\right)\times\left(2+\frac{1}{3}\right)$, so sieht man leicht ein, daß, und warum es gefehlt wäre, wenn man die Ganzen, und die Brüche für sich multipliciren wollte.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad\left(3a+\frac{b}{c}\right)\times\left(4a-\frac{3b}{2c}\right)=\frac{3ac+b}{c}\times\frac{8ac-3b}{2c}=\frac{24a^2c^2-abc-3b^2}{2c^2}.$$

Ist eine ganze Zahl mit einem Bruche zu multipliciren, so darf nur die ganze Zahl mit dem Zähler multiplicirt, oder, wo es thunlich ist, in den Nenner dividirt werden.

$$\frac{7}{8} \times 4 = \frac{7}{8} \times \frac{4}{1} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}. \quad \frac{7}{8} \times 4 = \frac{7}{8:4} = \frac{7}{2}.$$

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}.$$

Sind die Faktoren ächte Brüche, so ist das Produkt allzeit kleiner, als jeder der beiden Faktoren, da jeder ächte Bruch < 1 ist.

$$\left(m + \frac{p}{q}\right)\left(n + \frac{r}{s}\right) = \frac{mnqs + mqr + nps + pr}{qs}$$

oder $mn + \frac{np}{q} + \frac{mr}{s} + \frac{pr}{qs}$.

$$\frac{a^2 - b^2}{c + d} \times \frac{c - d}{a - b} = \frac{(a + b)(c - d)}{c + d} = \frac{ac + bc - ad - bd}{c + d}$$

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b}\right)\left(\frac{b^2}{acd} - \frac{b}{d} - \frac{b^2}{ad}\right) =$$

$\frac{b^2}{c^2 d} + \frac{a - ab + b - b^2}{cd} - \frac{a^2}{bd} - \frac{2a + b}{d}$, wenn man die Partialprodukte noch addirt.

$$\left(\frac{3m}{2} - 5n - \frac{p^2}{3}\right) \times \left(\frac{m}{4} - 2n + 6p^2\right) =$$

$$\frac{3m^2}{8} - \frac{17mn}{4} + \frac{107mp^2}{12} + 10n^2 - \frac{88np^2}{3} - 2p^4.$$

$$\left(\frac{2x^2}{3} - \frac{5x}{6} + 1\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{4} + 6\right) = \frac{x^4}{3} - \frac{11x^3}{12} + \frac{41x^2}{8} - \frac{23x}{4} + 6.$$

Division.

37.

Sind Brüche, welche gleiche Nenner haben, in einander zu dividiren, so wird der Quotient erhalten, wenn man den Zähler des Dividends durch den Zähler des Divisors dividirt.

$$\frac{12}{13} : \frac{4}{13} = \frac{12}{4} = 3. \quad \frac{5}{8} : \frac{7}{8} = \frac{5}{7}. \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a}{c}.$$

Denn gleichartige Theile sind offenbar eben so oft in einander enthalten, als Ganze.

Ungleichartige Brüche bringe man daher zuerst auf gleiche Benennung:

$$\frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{15}{20} : \frac{16}{20} = \frac{15}{16}. \quad \frac{3a}{2b} : \frac{4c}{5d} = \frac{15ad}{10bd} : \frac{8bc}{10bd} = \frac{15ad}{8bc}$$

Dieses Verfahren läßt sich jedoch in der Ausübung dahin abkürzen, daß man den Zähler des Dividends mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividends mit dem Zähler des Divisors multiplicirt; das erste dieser Produkte gibt den neuen Zähler, das zweite den neuen Nenner. Man drückt sich hiebei auch öfter so aus: Man stürze den Divisorbruch um, und verfahre wie bei der Multiplication,

$$\frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 4} = \frac{15}{16}. \quad \frac{3a}{2b} : \frac{4c}{5d} = \frac{3a \times 5d}{2b \times 4c} = \frac{15ad}{8bc},$$

wie oben.

Ganze und gemischte Zahlen werden wieder in uneigentliche Brüche aufgelöst.

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7} : \frac{3}{1} = \frac{6}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

oder $\frac{6}{7} : \frac{3}{1} = \frac{6 : 3}{7 : 1} = \frac{2}{7}$. $6 : \frac{5}{8} = \frac{6}{1} \times \frac{8}{5} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$.

$$4\frac{2}{3} : 3\frac{5}{6} = \frac{14}{3} : \frac{23}{6} = \frac{14}{3} \times \frac{6}{23} = \frac{84}{69} = \frac{28}{23} = 1\frac{5}{23}.$$

$$\frac{a}{b} : \left(4a - \frac{3b}{c}\right) = \frac{a}{b} : \frac{4ac - 3b}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{4ac - 3b} = \frac{ac}{b(4ac - 3b)}.$$

$$\left(5a + \frac{4m}{n}\right) : \left(8a - \frac{3m}{n}\right) = \frac{5an + 4m}{n} : \frac{8an - 3m}{n} = \frac{5an + 4m}{n}$$

$$\times \frac{n}{8an - 3m} = \frac{5an + 4m}{8an - 3m}.$$

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man mit der ganzen Zahl den Nenner multiplicirt, oder den Zähler dividirt, und eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividirt, wenn man das Produkt der ganzen Zahl und des Nenners, durch den Zähler des Divisors theilt.

Bei der Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch wird der Quotient allzeit größer, als der Dividend.

$$\frac{15(a^2 - x^2)}{8x^3} : \left(a - \frac{x^2}{a}\right) = \frac{15a}{8x^3}.$$

$$3x\left(m^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) : \left(6m - \frac{6n}{x}\right) = \frac{1}{2}(mx + n).$$

$$\frac{5a}{7b} : \left(a - \frac{c}{d}\right) = \frac{5ad}{7b(ad - c)}.$$

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{z}{r}\right) : \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{r}\right) = \frac{rx - yz}{rx + yz}.$$

$$\left(\frac{a^7b^2}{5} - \frac{47a^6b^3}{40} + \frac{9a^5b^4}{2} - 12a^4b^5\right) : \left(\frac{2a^3b^2}{5} - \frac{3a^2b^3}{4} + 6ab^4\right) = \frac{a^4}{2} - 2a^3b.$$

$$\left(\frac{8b^6}{a^3m^3} - \frac{6b^4}{m^2n^2} + \frac{3a^3b^2}{2mn^4} - \frac{a^6}{8n^6}\right) : \left(\frac{4b^4}{a^2m^2} - \frac{2ab^2}{mn^2} + \frac{a^4}{4n^4}\right) = \frac{2b^2}{am} - \frac{a^2}{2n^2}.$$

Man kann jeden Bruch in einen andern mit einem bestimmten Zähler, oder Nenner verwandeln, wenn man mit dem gegebenen Zähler oder Nenner in die verlangte Größe dividirt, und mit diesem Quotienten den ganzen Bruch multiplicirt. z. B. $\frac{3}{8}$ soll den Zähler 16 erhalten: $16 : 3 = \frac{16}{3}$

$$\text{daher } \frac{3}{8} = \frac{3 \times \frac{16}{3}}{8 \times \frac{16}{3}} = \frac{16}{\frac{128}{3}}.$$

$\frac{4}{5}$ erhalte den Nenner 12.

$12 : 5 = \frac{12}{5}$, und $\frac{4}{5}$, also $\frac{4 \times \frac{12}{5}}{5 \times \frac{12}{5}} = \frac{48}{\frac{5}{12}}$.

38.

Brüche, deren Zähler, oder Nenner wieder Brüche sind, heißen gebrochene Brüche. z. B.

$$\frac{\frac{1}{2}}{4}, \quad \frac{3}{\frac{4}{5}}, \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}.$$

Da diese Brüche nur Ausdrücke einer unvollzogenen Division sind, so läßt sich ihr Werth durch wirkliches Vollziehen der Division genau angeben.

Nur hat man hiebei große Aufmerksamkeit auf die genaue Unterscheidung der Theile des Zählers von denen des Nenners zu verwenden, welche daher durch einen etwas längern Strich von einander getrennt werden. z. B.

$$\frac{\frac{3}{4}}{5} \text{ und } \frac{3}{\frac{4}{5}}. \quad \frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{20}.$$

$$\frac{3}{\frac{4}{5}} = 3 : \frac{4}{5} = \frac{15}{4}. \quad \frac{\frac{1}{2}}{4} + \frac{5}{\frac{2}{3}} = 7\frac{5}{8}$$

$$\frac{\frac{4}{2}}{3} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}} = 5\frac{7}{12}. \quad \frac{\frac{8}{2}}{3} \times \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{6}{5}.$$

$$\frac{5}{\frac{2}{3}} : \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{7}} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}.$$

Von den Decimalbrüchen.

39.

Nach dem dekadischen Zahlensystem hat jede von der Linken zur Rechten hin folgende Stelle einer Zahl einen zehnmal kleinern Werth.

So bedeutet in der Zahl 8769 der 8ter einen Tausender, 7 einen Hunderter, 6 einen Zehner, und 9 neun Einheiten. Setzt man nach der Stelle der Einheiten ein Comma, und nach diesem wieder Ziffer, so muß die erste den zehnten Theil der Einheit (Zehntel), die zweite den zehnten Theil des Zehntels, Hundertel, die dritte Tausendstel u. s. w. bedeuten.

Solche Ausdrücke nun, welche an ganze Zahlen (durch ein Comma getrennt) in der genannten Bedeutung angefügt sind, heißen Decimalbrüche, da die dazu gehörigen Nenner 10, 100, 1000 u. s. w. überhaupt Potenzen von 10 sind.

Diesem zufolge muß 36,25 gelesen werden: 36 Ganze, 2 Zehntel, 5 Hundertel. Es können auch gar keine Ganze vorhanden sein, wo dann ihre Abwesenheit durch 0 ausgedrückt wird, z. B. 3 Zehntel, 4 Hundertstel, wird geschrieben 0,34. Man pflegt jedoch nicht jede Ziffer nach ihrem besondern Werthe (Zehntel, Hundertstel, Tausendstel) auszusprechen, sondern bringt sie alle auf die Benennung der letzten, welches sehr leicht dadurch geschieht, daß man alle Decimalstellen zusammen, wie eine ganze Zahl ausspricht, und ihr den der letzten Decimalstelle gehörigen Nenner gibt, z. B.

36,25 = 36 Ganze, 25 Hundertel; denn

$$\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100}.$$

0,00236 heißt 0 Ganze, 236 Hunderttausendstel.

Jeder Decimalbruch hat demnach einen Nenner, der aus 1 und so vielen Nullen besteht, als der Decimalbruch, vom Comma an gezählt, Stellen hat; daher die Nenner der Decimalbrüche wegbleiben.

Ein Decimalbruch ändert sich demnach auch nicht, wenn ihm gegen die Rechte beliebig viel 0 beigesetzt werden, denn

$$0{,}5 = \frac{5}{10} \cdot\ 0{,}50 = \frac{50}{100} = \frac{5}{10} \cdot\ 0{,}500 = \frac{500}{1000} = \frac{5}{10}.$$

Daß umgekehrt auch Null am Ende eines Decimalbruchs seines Werthes unbeschadet wegbleiben können, ergibt sich von selbst. Auch jede ganze Zahl kann in einen Decimalbruch verwandelt werden, wenn ihr Null beigesetzt, und selbe durch ein Comma von der ganzen Zahl getrennt werden; z. B. 8 = 8,0 = achtzig Zehntel, oder 8,00 = achthundert Hundertstel, was immer wieder 8 ist.

Das Aussprechen und Anschreiben der Decimalbrüche ist demnach keiner Schwierigkeit mehr unterworfen.

Man spricht nemlich die gesammten Decimalstellen wie eine ganze Zahl aus, und setzt den der letzten Stelle zugehörigen Nenner bei, der, wie gesagt, allzeit 1 mit so viel 0 ist, als der Decimalbruch Stellen enthält.

0,043 heißt 43tausendstel

3,04 „ 3 Ganze, 4 hundertstel, oder 304 hundertstel.

Hieraus erklärt sich ferner das Anschreiben:

Man darf nur den (ausgesprochenen) Zähler anschreiben, und nachsehen, wie viel Decimalstellen der Bruch dem Nenner zufolge haben müsse. Enthält der Zähler gerade so viel, als der Nenner verlangt, so setze man dem Zähler ein Comma, und diesem 0 vor. Enthält der Zähler mehr, so trenne man die übrigen von der Rechten zur Linken durch das Comma, wobei denn die dem Comma links stehenden Ziffer Ganze sind. Fehlen dem Zähler noch Decimalstellen, so ergänze man die fehlenden Stellen durch vorgesetzte Null:

Acht und dreißig hundertstel = 0,38
3878tausendstel = 3,878
432hunderttausendstel = 0,00432.

Jene Ziffer eines Decimalbruches, welche gleich weit vom Comma abstehen, haben gleiche Werthe.

Decimalbrüche mit gleichviel Decimalstellen heißen gleichartig, z. B. 0,057, und 4,873.

Ungleichartige Decimalbrüche werden gleichartig gemacht, wenn man denselben durch Beisetzen von Null am Ende, gleichviel Decimalstellen verschafft.

Von zwei, oder mehreren Decimalbrüchen ist jener der größere, welcher, vom Comma angefangen, zuerst eine größere Ziffer enthält, z. B. $0{,}708 > 0{,}6999$.

Wird bei einem Decimalbruch das Comma um 1, 2, 3... n Stellen gegen die Rechte versetzt, so wird der Bruch 10, 100, 1000... 10^n. mal größer, und ändert das Comma die Stelle gegen die Linke, um eben so vielmal kleiner, woraus also das Verfahren erhellet, einen Decimalbruch mit 10, 100, 1000 u. s. w. zu multipliciren, oder dividiren.

$0{,}234 \times 10 = 2{,}34.$	$28{,}25 : 10 = 2{,}825$
$0{,}234 \times 100 = 23{,}4.$	$28{,}25 : 100 = 0{,}2825$
$0{,}234 \times 1000 = 234.$	$28{,}25 : 1000 = 0{,}02825$
$0{,}234 \times 10000 = 2340.$	$28{,}25 : 10000 = 0{,}002825$

40.

Jeder Decimalbruch kann in einen gewöhnlichen, und jeder gewöhnliche in einen Decimalbruch verwandelt werden.

Einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, heißt den gegebenen Bruch in einen andern, dessen Nenner 10, 100, 1000... 10^n ist, umändern.

Die Möglichkeit läßt sich leicht einsehen. Man hängt nemlich dem Zähler des Bruches beliebig viel 0 an, und dividirt mit dem Nenner. Im Quotient schneide man so viele Decimalstellen ab, als Null dem Zähler angehängt wurden. Geht diese Division einmal auf, so ist der gefundene Bruch mit dem gewöhnlichen gleich, und heißt endlicher Decimalbruch.

$\frac{4}{5} = 0{,}8$; $\frac{13}{16} = 0{,}8125$; $\frac{19}{80} = 0{,}2375$.

$\frac{17}{20} = 0{,}85$; $\frac{7}{800} = 0{,}00875$; $\frac{372}{1250} = 0{,}2976$; $\frac{3}{40} = 0{,}075$;

$\frac{347}{25600} = 0{,}0135546875$.

Es kann aber auch sein, daß diese Division nie zu Ende geht, so lange sie auch fortgesetzt würde, und zwar, so oft unter den Faktoren des Nenners des zu verwandelnden Bruches, welcher jedoch keiner Verkleinerung mehr fähig sein darf, andere Zahlen, als 2 und 5 vorkommen. Es sind nemlich die Faktoren von 10, 100, 1000 ꝛc. nur 2 und 5, mithin auch nur durch diese, und die daraus möglichen Produkte theilbar.

Brüche, bei denen die Division nicht aufgeht, heißen unendliche, oder periodische Decimalbrüche, und man erkennt sie daran, daß sie entweder immer die nemliche Ziffer, oder je 2, 3 u. s. w. gleiche wiederholen, oder eine solche Wiederholung einer oder mehrerer Ziffer nach einigen vorhergegangenen ungleichen eintritt.

Die sich wiederholenden Ziffer heißen die Periode, welche gleich eintritt, sobald unter den Faktoren des Nenners kein 2 und 5 ist.

Einen periodischen Decimalbruch durch die Schrift kenntlich zu machen, setzt man demselben, nachdem man so viel Decimalstellen angeführt hat, daß die Periode deutlich geworden ist, einige Punkte nach.

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ (3 Periode).

$\frac{5}{6} = 0{,}83333\ldots$ (3 =).

$\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$ (27 =).

$\frac{18}{37} = 0{,}486486\ldots$ (486 =).

$\frac{17}{48}$ = 3541666 . . . . . (6 Periode).

$\frac{3}{7}$ = 0,428571428571 . . . (428571 =).

$\frac{5}{9}$ = 0,55555 . . . . . (Periode?).

$\frac{9}{13}$ = 0,692307692307 . . . . . (=).

$\frac{23}{111}$ = 0,207207 . . . . . (=).

$\frac{181}{1100}$ = 0,164545 . . . . . (=).

$\frac{7}{15}$ = 0,4666 . . . . . (=).

$\frac{5}{24}$ = 0,20833 . . . . . (=).

$\frac{8}{27}$ = 0,296296 . . . . . (=).

$\frac{24}{11}$ = 2,1818 . . . . . (=).

Bei der Division mit einer bestimmten Zahl können nur gewisse Reste zum Vorschein kommen, und wenn daher eine Zahl zum zweitenmal als Rest erscheint, so müssen sich auch die Zifferstellen im Quotient wiederholen.

Die Verwandlung gegebener endlicher Decimalbrüche in gewöhnliche geschieht durch Verkleinerung des Bruches mit beigesetztem Nenner, z. B. $0{,}625 = \frac{625}{1000} = \frac{\overset{\smile}{25}}{40} = \frac{\overset{\smile}{5}}{8}$. $0{,}241 = \frac{241}{1000}$.

Bei den unendlichen Brüchen können jedoch zwei Fälle eintreten, wenn

1) die Periode gleich anfangs beginnt, oder

2) nach einer, oder mehreren vorhergegangenen ungleichen Ziffern.

Im ersten Falle setze man den unendlichen Decimalbruch einem Buchstaben (allenfalls x) gleich, und multiplicire den ganzen Ausdruck mit 10, 100, 1000 ꝛc., je nachdem die Periode 1, 2, 3 . . . Ziffer hat. Von diesem Produkt ziehe man den einfachen Bruch ab, und

dividire den Rest auf beiden Seiten mit dem Coefficienten von x. Die kleinste Form dieses Bruches ist der gesuchte. z. B.

$$0{,}3333\ldots\ldots = x$$
$$10x = 3{,}333\ldots\ldots$$
$$-x = -0{,}3333\ldots\ldots$$
$$9x = 3$$
$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$0{,}486486\ldots\ldots = x$$
$$1000x = 486{,}486\ldots\ldots$$
$$-x = -0{,}486486\ldots\ldots$$
$$999x = 486$$
$$x = \frac{486}{999} = \frac{54}{111} = \frac{18}{37}.$$

Im zweiten Falle multiplicire man den auf genannte Weise gestalteten Ausdruck mit einer Zahl, die aus 1, und so viel 0 besteht, als die Periode, und die derselben vorhergehenden Stellen, Ziffer enthalten. Auch wird der Subtrahend erst dadurch gebildet, daß man den einfachen Ausdruck vorher mit einer Zahl multiplicirt, die aus 1 und so viel 0 besteht, als der Periode Ziffer vorhergehen. Das übrige Verfahren bleibt wie vorher, z. B. $0{,}8333\ldots\ldots = x$

$$100x = 83{,}33\ldots$$
$$-10x = -8{,}333\ldots$$
$$90x = 75$$
$$x = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}.$$

$$0{,}3541666\ldots = x$$
$$100000x = 35416{,}66\ldots$$
$$10000x = 3541{,}666\ldots$$
$$90000x = 31875$$
$$x = \frac{31875}{90000}\overset{25}{=}\frac{1275}{2600}\overset{25}{=}\frac{51}{144} = \frac{17}{48}.$$

Zur Uebung verwandle man die oben angegebenen Decimalbrüche in die gewöhnlichen.

41.

Die vier Rechnungsarten mit Decimalbrüchen sind, da letztere nach dem nemlichen Systeme, wie die ganzen Zahlen, geordnet sind, keiner Schwierigkeit unterworfen.

Nach §. 10 und 39 müssen bei der Addition und Subtraction die Decimalbrüche so unter einander gestellt werden, daß die Ziffer, welche das Comma neben sich haben, gerade unter einander kommen.

0,3875 + 6,883 + 15,97 =

0,3875
6,883
15,97

23,2405

24 + 3,0096 + 2,00978 + 6,27 =

24
3,0096
2,00978
6,27

35,28938

3,879 — 2,387 = 3,879
2,387

1,492

3,82 — 2,998 = 3,82
2,998

0,822

47,839 — 25 = 47,839
25

22,839

36,238 — 23,45 = 36,238
23,45

12,788

45 — 32,891 = 45
32,891

12,109.

0,90058 + 7,634 + 3,007956 = 11,542536.

113,67849 + 76,859 + 9,7 + 5 + 152,6043 + 7,85976 + 9,437 + 8,65 + 7,94 = 391,72855.

0,947 — 0,195 = 0,752.
385,76943 — 72,57 = 313,19943.
0,5 — 0,003 = 0,497.
129,57 — 6,894356 = 122,675644.
23 — 8,735 = 14,265.
63,57 — 42 = 21,57.

Bei der Multiplication ordne man die einzelnen Zifferstellen, ohne Rücksicht auf das Comma, wie bei ganzen Zahlen, multiplicire nach eben diesen Regeln, im Produkte aber müssen so viel Ziffer auf den Decimalbruch gerechnet werden, als die beiden Faktoren Decimalen enthalten. Sind die Ziffer im Produkte weniger, als in beiden Faktoren Decimalstellen sind, so müssen selbe durch vorgesetzte Null ergänzt werden.

3,5 × 0,7 = 35 × 7 = 2,45
0,015 × 0,23 = 15 × 23 = 0,00345.
0,43 × 0,65 = 0,2795
113,5 × 0,072 = 8,172
0,372106 × 0,0054 = 0,0020093724
0,5 × 36000 = 18000.

Da die Division der Brüche Gleichheit der Nenner fodert, so geht die einfache Regel hervor: Decimalbrüche mit gleichviel Decimalstellen dividire man wie ganze Zahlen. Ungleichartige werden zuvor gleichartig gemacht.

So lange hiebei die Division wirklich vollzogen werden kann, enthält der Quotient Ganze, der allenfallsige Rest, wird aber nicht als gewöhnlicher Bruch, sondern als Decimal-Bruch im Quotient ausgedrückt, und ist in vielen Fällen wieder unendlich. Dasselbe geschieht, wenn der Quotient gar keine ganze Zahl enthält.

$$0{,}48 : 0{,}12 = \frac{48}{12} = 4.$$

$$3{,}24 : 0{,}18 = \frac{324}{18} = 18.$$

$$0{,}00289 : 0{,}17 = \frac{289}{17000} = 0{,}017.$$

$$0{,}48 : 1{,}2 = \frac{48}{120} = 0{,}4.$$

$$0{,}66 : 3{,}6 = \frac{66}{360} = 0{,}18333 \ldots$$

Der (erhaltene) Quotient ist in diesen Fällen um so genauer, je weiter die Division fortgesetzt wird; kann jedoch nie vollkommen erreicht werden.

0,432 : 0,024 = 18
400 : 0,25 = 1600
5,64 : 2 = 2,82
378 : 0,01 = 37800
1 : 0,24 = 4,1666 . . .
374 : 2,4 = 155,833 . . .
0,2 : 64 = 0,003125
0,42 : 3,6 = 0,1166 . . . .

Von der Richtigkeit des Verfahrens bei der Multiplication und Division überzeugt man sich, wenn man die gegebenen Decimalbrüche durch Unterschreiben der zugehörigen Nenner in gewöhnliche verwandelt, und die verlangte Rechnungsart vollzieht.

Kommen Decimalbrüche und gewöhnliche in einer Aufgabe zusammen vor, so muß man in den meisten Fällen die einen in die andern umändern, was sich jedoch, so wie die vortheilhafte Behandlungsweise, aus der Beschaffenheit der Aufgabe zeigt.

Von den Kettenbrüchen.

42.

(Die ausführliche Lehre der Kettenbrüche überhaupt, so wie ihre weitere Anwendung muß, da es die Gränzen dieses Lehrbuches überschreitet, hier wegbleiben. Deßwegen konnten auch die strengen Beweise der hier aufgestellten Behauptungen keinen Platz finden.)

Wenn man den Werth eines Bruches, dessen Zähler und Nenner große Zahlen sind, in einer kleineren Form ohne bedeutende Abweichung von dem genauen Werthe des gegebenen Bruches darstellen will, bedient man sich folgenden Verfahrens. Man dividirt mit dem Zähler in Zähler und Nenner, der jedesmalige Rest wird der neue Divisor, und der vorhergehende Divisor wird Dividend. Der immer neu entstandene Bruch wird dem Nenner des vorhergehenden stets beigefügt.

Diese Division muß sich dann einmal endigen. So ein Bruch heißt Kettenbruch.

$$\frac{68}{157} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5}}}}$$

136	
21	
68	
63	
5	
21	
20	
1	
5	

$$0{,}243 = \frac{243}{1000} = \frac{1}{4+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{9}}}}}$$

972	
28	
243	
224	
19	
28	
19	
9	
19	
18	
1	
9.	

Aus unächten Brüchen werden zuerst die Ganzen ausgezogen, und zu dem Kettenbruch gesetzt; oder man wechselt Zähler und Nenner, sucht die Näherungswerthe, und kehrt diese ebenfalls wieder um, so erhält man dasselbe.

$$\frac{200}{69} = 2+\frac{1}{1+\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{1}{6}}}}$$

138	
62	
69	
62	
7	

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 62 \\ 56 \\ \hline 6 \\ \hline 7 \\ 6 \\ \hline 1 \\ \hline 6 \end{array}$$

oder

$$\frac{69}{200} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6.}}}}}$$

Um aber aus einem Kettenbruche diejenigen Brüche zu finden, welche näherungsweise den Werth des gegebenen ausdrücken, verfahre man, wie folgt:

Der erste Näherungswerth ist der erste Quotient selbst, also im ersten Beispiele $= \frac{1}{2}$.

Der Kettenbruch selbst heißt $\frac{68}{157} = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5.}}}}$

Der zweite Näherungswerth wird erhalten, wenn man den Nenner des ersten Bruches mit dem ihm beigefügten Bruch auf gleiche Benennung bringt, und mit diesem Bruch in den ersten Zähler dividirt:

also $2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ in 1 getheilt $= 1 : \frac{7}{3} = \frac{3}{7}$.

Es sind demnach die zwei ersten Näherungswerthe $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}$.

Um den dritten Näherungswerth zu finden, nehme man den dritten Nenner (4) multiplicire damit den Zähler des zweiten Näherungswerthes, und zähle zu diesem Produkte den Zähler des vorhergehenden; dieß gibt den Zähler des dritten Näherungswerthes; eben

so multiplicire man mit dem dritten Nenner (4) den Nenner des zweiten, und zähle den Nenner des vorigen wieder dazu, so ist dieß der Nenner des dritten Näherungswerthes, also hier $\frac{3 \times 4 + 1}{7 \times 4 + 2}$; also $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{13}{30}$ die drei ersten Näherungswerthe. Dieß Verfahren bleibt für alle folgende Näherungswerthe; der vierte Näherungswerth wird heißen $\frac{13 \times 5 + 3}{30 \times 5 + 7} = \frac{68}{157}$. Also $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{13}{30}$, $\frac{68}{157}$.

Von $\frac{200}{69}$ sind eben so die Näherungswerthe $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{3 \times 8 + 2}{1 \times 8 + 1}$ $= \frac{26}{9}$, $\frac{26 \times 1 + 3}{9 \times 1 + 1} = \frac{29}{10}$, $\frac{29 \times 6 + 26}{10 \times 6 + 9} = \frac{200}{69}$.

Also 2, 3, $\frac{26}{9}$, $\frac{29}{10}$, $\frac{200}{69}$.

Die Näherungswerthe für $\frac{69}{200}$ sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{9}{26}$, $\frac{10}{29}$, $\frac{69}{200}$, welche umgekehrt mit den so eben gefundenen (2, 3, $\frac{26}{9}$ ꝛc.) völlig einerlei sind.

Aus dem Vergleiche dieser Näherungswerthe, die man auch Partialbrüche heißt, ergibt sich:

1) daß die gefundenen Näherungswerthe im Zähler und Nenner relative Primzahlen enthalten;

2) daß es nicht möglich ist, zwischen 2 aufeinander folgenden Partialbrüchen einen 3ten einzuschalten, dessen Werth zwischen dem Werthe beider liegt, und der zugleich aus kleinern Zahlen besteht, als in den Partialbrüchen vorkommen;

3) daß die Partialbrüche abwechslungsweise immer größer und kleiner als der gegebene Bruch sind, und zwar der 1, 3, 5, 7te (alle an einer ungeraden Stelle) größer, der 2, 4, 6, 8te ... (an einer geraden) kleiner als der gegebene Bruch;

4) daß die 1, 3, 5ten . . . (ungeraden) Partialbrüche immer kleiner, die 2, 4, 6ten . . . (geraden) immer größer werden, je weiter sie vom ersten entfernt sind, d. h. die Partialbrüche nähern sich immer mehr dem Werthe des gegebenen Bruches;

die beiden Eigenschaften 3 und 4 finden entgegengesetzt statt, wenn der Bruch ein unächter ist;

5) daß der letzte dem gegebenen Bruch an Werth ganz gleich ist, aber, so bald der gegebene Bruch einer Verkleinerung fähig war, in der einfachsten Form hervortritt;

6) daß der Unterschied je zweier auf einanderfolgender Partialbrüche wieder einem Bruche gleich ist, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Produkt der Nenner der beiden Partialbrüche ist; ist daher der eine Bruch $\frac{1}{m}$, der andere $\frac{1}{n}$, so ist ihr Unterschied (vorausgesetzt, daß $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ Partialbrüche sind) $= \frac{1}{m \cdot n}$, so ist im Beispiel 1,) $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{7}$ um $\frac{1}{14}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{13}{30}$ um $\frac{1}{210}$ u. s. w. unterschieden, was sich durch wirkliche Subtraction strenge erweisen läßt. Ist der gegebene Bruch ächt, so sind die Unterschiede abwechselnd positiv und negativ, bei unächten findet das Gegentheil statt.

$\frac{181}{695}$ gibt $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{6}{23}, \frac{25}{96}, \frac{181}{695}$

6,277 ... gibt 6, $\frac{19}{3}, \frac{25}{4}, \frac{44}{7}, \frac{113}{18} = 6\frac{5}{18} = 6{,}277\ldots$

$\frac{120}{207} = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{11}{19}, \frac{40}{69}$.

Dadurch, daß man was immer für 2 Zahlen, die in einem gewissen Verhältnisse zu einander stehen, in einen Bruch umwandelt, und eben so behandelt, findet man diejenigen Zahlen, welche dieß Verhältniß in kleinerer (bequemerer) Form darstellen. z. B. der französische Fuß hält 144, und der rheinländische 139,13 Linien (franz.), welche kleinere Zahlen drücken dasselbe Verhältniß aus?

Macht man also 139,13 und 144 gleichartig, so erhält man 13913 und 14400, und verwandelt man $\frac{13913}{14400}$ in einen Kettenbruch, so erhält man folgende Näherungswerthe

$\frac{1}{1}, \frac{28}{29}, \frac{29}{30}, \frac{57}{59}, \frac{200}{207}, \frac{1457}{1508}$ und $\frac{3114}{3223}$

wobei den im Zähler angegebenen französischen Fußen, die im Nenner befindlichen rheinländischen entsprechen.

Die Peripherie (der Umfang) des Kreises verhält sich zum Durchmesser, wie 1 : 3, 1415926. — oder 10000000 : 31415926. Dies Verhältniß läßt sich durch folgende Brüche ausdrücken:

$$\frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{106}{333}, \frac{113}{355} \text{ u. s. w.}$$

Auflösung der Brüche in unendliche Reihen.

43.

Wird bei einem Bruche, dessen Nenner eine complexe Größe, und im Dividend oder Zähler nicht enthalten ist, die Division wirklich vollzogen, so sieht man bald, daß diese Division nicht zu Ende gehen kann, und der Quotient erscheint hiebei in vielen Fällen in der Form einer Reihe, die in ihrem Fortschreiten ein gewisses Gesetz beobachtet. z. B.

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 \ldots$$

$$\begin{array}{l} 1 - a \\ 1 - a \\ - \quad + \\ \hline a \\ \quad a - a^2 \\ \quad - \quad + \\ \hline \quad\quad a^2 \\ \quad\quad a^2 - a^3 \\ \quad\quad - \quad + \\ \hline \quad\quad\quad a^3 \\ \quad\quad\quad a^3 - a^4 \\ \quad\quad\quad - \quad + \\ \hline \quad\quad\quad\quad a^4 \\ \quad\quad\quad\quad a^4 - a^5 \\ \quad\quad\quad\quad - \quad + \\ \hline \quad\quad\quad\quad\quad a^5. \end{array}$$

Man kann diese Reihe abbrechen, wo man will, wenn man nur den Rest als den Zähler eines Bruches betrachtet, der den Divisor zum Nenner hat, welcher Rest zu dem bereits gefundenen Quotient hinzugefügt werden muß. So ist $1 + a^1 + a^2 + a^3 + \frac{a^4}{1-a}$

wirklich $= \frac{1}{1 - a}$.

Es scheint auf den ersten Augenblick sonderbar, wie ein Bruch $\left(\text{wie } \frac{1}{1 - a}\right)$ einer unendlichen Reihe, $(1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 \ldots)$ gleich sein könne. Dieses leichter einzusehen, setze man statt a, bestimmte Werthe. Ist $a = 1$, so erhält man $\frac{1}{1 - 1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ ohne Ende fort, so daß der erhaltene Quotient größer, als jede durch Ziffer darstellbare Zahl, d. h. unendlich groß wird, was man durch das Zeichen ∞ ausdrückt.

Da aber $\frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0}$ ist, so muß also auch $\frac{1}{0} = \infty$ sein, was sich auch bei näherer Betrachtung ergibt; da bekanntlich ein Bruch um so größer wird, je kleiner sein Nenner wird, so muß er unendlich groß werden, wenn sein Zähler durch den kleinsten Divisor (0) dividirt wird.

Setzte man z. B. $0 = \frac{1}{1{,}000{,}000}$ (nur der Erklärung wegen),

so wäre $= \frac{\frac{1}{1}}{1{,}000{,}000} = 1{,}000{,}000.$

Eben so ergibt sich aus $\frac{a}{1 - a}$, daß $\frac{a}{0} = \infty$, $a = 0 . \infty$ und $\frac{a}{\infty} = 0$ sei, d. h., jede endliche Größe, durch den kleinsten Divisor dividirt, gibt den größten, und durch den größten Divisor dividirt, den kleinsten Quotient.

Da aber das unendlich Große und unendlich Kleine, (das wir mit $\frac{1}{\infty}$ bezeichnen), durch keine Zahl mehr darstellbar ist, so muß auch $\infty \pm a = \infty$, $a \pm \frac{1}{\infty} = a$ sein.

Setzt man in $\frac{1}{1 - a}$ für $a = 2$, so erhält man $\frac{1}{1 - 2} =$ $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$. da doch $\frac{1}{1 - 2} = \frac{1}{-1} =$ -1 ist.

Es erklärt sich jedoch dieser Quotient, wenn man betrachtet, daß, wo die Reihe abgebrochen wird, noch ein Rest übrig bleibt, der für die obige Reihe unter dem Ausdrucke $\frac{-64}{-1}$ gefunden wird, wornach man $1+2+4+8+16+32+\frac{-64}{-1} = 63-64 = -1$ erhält.

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \ldots$$ und

wenn $a = 1$, so ist also $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

welche Reihe für eine gerade Anzahl Glieder stets 0, für eine ungerade $= +1$ wird, da doch $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ist. Aber der jedesmalige Rest ist hier bei jeder geraden Gliederzahl des Quotienten $+\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, und bei jeder ungeraden $-\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$, daher die Summe entweder $0 + \frac{1}{2}$, oder $1 - \frac{1}{2}$ in beiden Fällen $\frac{1}{2}$.

Eben so ist

$$\frac{c}{a \mp b} = \frac{c}{a} \pm \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} \pm \frac{b^3c}{a^4} + \ldots \pm \frac{b^{n-1}c}{a^n}$$

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots 2x^{n-1}$$

$$\frac{a-b}{a^2-c^2} = \frac{1}{a} + \frac{c^2}{a^3} + \frac{c^4}{a^5} + \frac{c^6}{a^7} + \ldots \frac{c^{2n-2}}{a^{2n-1}}.$$

$$\frac{1}{1-2a+a^2} = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + \ldots + na^{n-1}.$$

$$\frac{1}{1-a+a^2} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10} + \ldots \pm a^{3n}$$
$$\pm a^{1+3n}.$$

für das $(2n+1)$te und $2(n+1)$te Glied, z. B. für das 13te Glied ist $2n+1 = 13$, und $n = 6$, mithin $a^{3 \cdot 6} = \mp a^{18}$, und da die Glieder paarweise abwechselnd, positiv und negativ sind, so folgt, daß das 13te als erstes Glied des 7ten Paares positiv sei.

Man kann daher alle Brüche, deren Nenner eine zusammenge-

setzte Größe ist, in solche unendliche Reihen auflösen, und es befolgen die Glieder dieser Reihen ein gewisses Gesetz, welches nicht selten leicht zu erkennen ist, in welchem Falle diese Reihen ohne wirkliche Division weiter fortgesetzt werden können. Ob eine solche Reihe abnehmend (convergirend) oder zunehmend (divergirend) sei, ist leicht aus der Beschaffenheit der Glieder zu erkennen.

Von den Potenzen und Wurzeln.

A. Eintheiliger Größen.

44.

Wird die Einheit mit ein und derselben Zahl, sie mag beschaffen sein, wie sie wolle, multiplicirt oder dividirt, so heißt die daraus entstandene Zahl eine Potenz oder Würde.

So sind also

$1 . 4 . 4 = 16$, $1 . 6 . 6 . 6 = 216$, $1 : 4 : 4 = \frac{1}{16}$.

$1 : 6 : 6 : 6 = \frac{1}{216}$, $1 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

$1 : \frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{9}{4}$.

allgemein

$1 . a . a . a = aaa$.

$1 : a : a : a = \frac{1}{aaa}$.

Potenzen.

Eine Würde oder Potenz erzeugen, heißt potenziren.

Die Potenzen, so wie die einzelnen Faktoren sind immer Zahlen, denn nur Zahlen lassen sich miteinander multipliciren, und ineinander dividiren.

Die Zahl, womit multiplicirt oder dividirt wird, heißt die Wurzel, und die durch Multiplication oder Division erhaltene, die Potenz.

Die Zahl, welche angibt, wie oft die Einheit multiplicirt oder dividirt werden soll, heißt der Exponent, so ist in $1 . 6 . 6 . 6 = 216$. 6 die Wurzel, 216 die Potenz, und da die Multiplication 3mal vollzogen wurde, 3 der Exponent.

Man sieht aber, daß, wenn das Multipliciren oder Dividiren oft vollzogen werden soll, die erhaltenen Ausdrücke, besonders bei Buchstabengrößen, ziemlich weitläufig werden würden.

Um selbe daher kürzer, oder bequemer auszudrücken, bezeichnet man diese wiederholten Multiplicationen oder Divisionen durch Ziffer, welche rechts ober die zu potenzirende Zahl (Wurzel) gesetzt werden, und Exponenten heißen.

45.

Um aber die durch Division erhaltenen Potenzen von den durch Multiplication entstandenen zu unterscheiden, so bezeichnet man, da Multiplication und Division einander gerade entgegengesetzt sind, die durch Multiplication entstandenen, mit positiven, die aus Division hervorgegangenen, durch negative Exponenten. z. B. $1 . 6 . 6 . = 6^{+2}$, (das + vor dem Exponenten kann auch wegbleiben).

$$1 . \frac{3}{4} . \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

$$1 . a . a . a . a = a^4.$$

$$1 : 6 : 6 : 6 = 6^{-3}.$$

$$1 : \frac{3}{4} : \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}.$$

$$1 : a : a : a : a = a^{-4}.$$

allgemein bedeutet a^n, man soll a mit der Einheit nmal multiplici-ren, a^{-n}, es soll die Einheit nmal durch a dividirt werden.

Man unterscheidet die Potenzen nach Graden, und zwar so, daß man eine Potenz von dem so vielten positiven oder negativen Grade nennt, so oft das Multipliciren oder Dividiren vollzogen worden ist.

4^2 wird gelesen, 4 in der 2ten Potenz, a^5 heißt a in der 5ten Potenz, a^{-6}, a in der (— 6ten) Potenz.

Nachstehende Tabelle enthält die ersten neun Potenzen der Zahlen von 1 — 10.

1te	2te	3te	4te	5te	6te	7te	8te	9te
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	154217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
10.	100.	1000.	10000.	100000.	1000000.	10000000.	100000000.	1000000000.

46.

Da 1 . 6 . 6 . 6, so viel ist, als 6 . 6 . 6, so folgt, daß man bei den durch Multiplication entstandenen Potenzen die Einheit auch weglassen kann, weil dadurch im Produkte keine Veränderung hervorgebracht wird, und daß demnach immer gleiche Faktoren ohne Einheit auch Potenzen sind.

Diese Abkürzung, oder das Weglassen der Einheit, kann aber bei den durch Division entstandenen Potenzen nicht statt finden.

z. B. in 1 : 3 : 3, wo der Dividend 1 unentbehrlich ist.

Ferner ist 1 : 6 : 6 : 6 mit $\frac{1}{6 . 6 . 6}$ völlig einerlei, und nach dem so eben Gesagten 6 . 6 . 6 mit 1 . 6 . 6 . 6, beides $= 6^3$, also auch $1 : 6 : 6 : 6 = \frac{1}{6 . 6 . 6} = \frac{1}{6^3} = 6^{-3}$.

d. h., jede Potenz mit negativem Exponent ist einem Bruche gleich, dessen Zähler die Einheit, und Nenner die zu potenzirende Größe mit positivem Exponent ist. Allgemein also:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ und } \frac{1}{a^{-n}} = a^n, \text{ denn } \frac{1}{a^{-n}} = 1 : \frac{1}{a^n} = a^n.$$

Man kann daher alle Potenzen aus Zähler und Nenner, oder umgekehrt, versetzen, wenn das Zeichen des Exponenten gewechselt wird, und jeder Bruch kann die gebrochene Form verlieren, wenn man die Faktoren des Nenners zu Faktoren des Zählers mit entgegengesetzten Zeichen macht.

$$5a^{-2}b^3d = \frac{5b^3d}{a^2} = \frac{5a^{-2}}{b^{-3}d^{-1}}. \quad a^{-5}c^{-3} = \frac{1}{a^5c^3}.$$

$$3a^{m-1}c^{4-2n}d^2 = \frac{3a^m c^4 d^2}{ac^{2n}}.$$

Selbst aus zusammengesetzten Ausdrücken können die negativen Potenzen dadurch weggeschafft werden, wenn man alle Glieder des gegebenen Ausdruckes mit dem Produkte multiplicirt, das alle jene Potenzen mit positiven Exponenten enthält, die in dem Ausdruck mit negativen Exponenten vorkommen.

Soll $\frac{3ab^{-2} + cd^{-4}}{m^{-3} - 2n^{-2}}$ von allen negativen Potenzen befreit wer-

den, so multiplicirt man den gegebenen Ausdruck im Zähler und Nenner mit $b^2d^4m^3n^2$, so erhält man

$$\frac{3ad^4m^3n^2 + b^2cm^3n^2}{b^2d^4n^2 - 2b^2d^4m^3}.$$

Da $a = 1 . a$, oder $4 = 1 . 4$ ist, so sieht man, daß jede Größe ohne Exponent als erste Potenz zu betrachten ist, wobei aber der Exponent $+ 1$, da ihn jede Größe hat, gewöhnlich wegbleibt, doch aber stets dazu gedacht werden muß.

Dagegen kann in dem Ausdruck $\frac{1}{4} = 4^{-1}$ der Exponent (-1) nie wegbleiben, da $\frac{1}{4}$ gerade dem $1 . 4 .$ entgegengesetzt ist.

47.

Aus dem Begriffe einer Potenz folgt auch, daß jede Größe mit dem Exponent 0 der Einheit gleich sei, $a^0 = 1$, $10^0 = 1$, $125^0 = 1$. Denn da der Exponent anzeigt, wie oft die Einheit mit der Wurzel multiplicirt oder dividirt werden soll, so folgt die Bedeutung von a^0, als einer Größe, welche angibt, es soll die Einheit nicht multiplicirt, und nicht dividirt werden, d. h. unverändert bleiben.

Die Einheit selbst ist in jeder Potenz wieder 1.

So wie jede Zahl Wurzel sein kann, kann auch ein und dieselbe Zahl Potenz verschiedener Wurzeln sein. z. B.:

$$\left.\begin{aligned} 2^6 &= 64 \\ 4^3 &= 64 \\ 8^2 &= 64 \\ 64^1 &= 64 \end{aligned}\right\}$$ wo also 64 als 1, 2, 3 und 6te Potenz erscheint, je nachdem die Wurzel 64, 8, 4 oder 2 ist.

So lange die Wurzel, oder die zu potenzirende Größe positiv ist, ist jede Potenz, der Exponent mag eine gerade oder ungerade Zahl sein, positiv, da lauter positive Faktoren nur ein positives Produkt geben können. Ist aber die Wurzel negativ, so sind nur jene Potenzen positiv, deren Exponent eine gerade Zahl ist. Denn eine gerade Anzahl negativer Faktoren gibt ein positives, und eine ungerade Anzahl negativer Faktoren ein negatives Produkt.

$(+ a)^{\pm 2n} = + a^{\pm 2n}$. z. B. $(+ 4)^4 = + 256$.

$(+ a)^{\pm (2n-1)} = + a^{\pm (2n-1)}$. „ $(+ 4)^3 = + 64$.

$(-a)^{\pm 2n} = +a^{\pm 2n}$. z. B. $(-4)^4 = +256$.
$(-a)^{\pm(2n-1)} = -a^{\pm(2n-1)}$. » $(-4)^3 = -64$.

Man könnte daher auch sagen: alle gerade Potenzen sind positiv, und alle ungeraden haben mit der Wurzel einerlei Zeichen.

Kommt aber eine Potenz mit geradem Exponent negativ vor, z. B. $-a^6$, so ist dieß durchaus nicht unrichtig oder unmöglich, denn $-a^6$, ist nicht negativ, weil die Wurzel negativ war, sondern ist es geworden, nachdem die 6te Potenz schon gebildet war, z. B. von $13a^4$ soll $(+a^6)$ abgezogen werden, so erhält man $13a^4 - a^6$, oder man betrachtet negative Größen mit geraden Exponenten als Produkte ungleicher Faktoren, wornach sie dann als keine Potenzen anzusehen sind, z. B. $+a^3 \times -a^3 = -a^6$.

Da die Rechnung mit Potenzen höchst einfach ist, so konnten die Gesetze dafür füglich schon früher aufgestellt werden.

Der Vollständigkeit wegen mag folgende Zusammenstellung der 4 Rechnungsarten hier Platz finden.

Addition und Subtraction.

48.

Da Potenzen nur dann gleichartig sind, wenn sie gleiche Buchstaben haben, und jeder Buchstabe mit demselben Exponent versehen ist; so können sie auch nur bei dieser Eigenschaft addirt und subtrahirt, außerdem blos durch das treffende Zeichen verbunden werden.

$$8a^m \pm 5a^m = (8 \pm 5)a^m.$$
$$(3a^m) \pm (7a^n) = 3a^m + 7a^n.$$

Multiplication und Division.

Bei der Multiplication werden, (wie schon angeführt wurde), die Exponenten gleicher Buchstaben addirt, und bei der Division der Exponent des Divisors von dem des Dividends subtrahirt. Bei ungleichartigen Potenzen lassen sich Multiplication und Division ebenfalls nur anzeigen.

$$a^4 \times a^3 = a^{4+3} = a^7.$$
$$a^{-4} \times a^3 = a^{-4+3} = a^{-1}.$$
$$a^{-4} \times a^{-3} = a^{-4-3} = a^{-7};$$

denn $a^4 \times a^3 = 1.a.a.a.a \times 1.a.a.a = 1.a.a.a.a.a.a.a = a^7$.

$$a^{-4} \times a^3 = \frac{1}{a.a.a.a} \times 1.a.a.a = \frac{1.a.a.a}{1.a.a.a.a} = \frac{1}{a} = a^{-1}.$$

$$a^{-4} \times a^{-3} = \frac{1}{a.a.a.a} \times \frac{1}{a.a.a} = \frac{1}{a.a.a.a.a.a.a} = \frac{1}{a^7} = a^{-7}.$$

Dagegen $a^4 \times b^3 = a^4b^3$.

$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3.$$
$$a^5 : a^{-2} = a^{5-(-2)} = a^{5+2} = a^7.$$
$$a^{-5} : a^{-2} = a^{-5-(-2)} = a^{-5+2} = a^{-5};$$

denn $a^5 : a^2 = \frac{1.a.a.a.a.a}{1.a.a} = a.a.a = a^3.$

$$a^5 : a^{-2} = 1.a.a.a.a.a : \frac{1}{a.a} = 1.a.a.a.a.a.a.a = a^7.$$

$$a^{-5} : a^{-2} = \frac{1}{a.a.a.a.a} : \frac{1}{a.a} = \frac{1.a.a}{1.a.a.a.a.a} = \frac{1}{1.a.a.a}$$

$$= \frac{1}{a^3} = a^{-3}.$$

$a^4 : b^3 = \frac{a^4}{b^3}$. Daher allgemein

$a^m \times a^n = a^{m+n}$, und $a^m \times b^n = a^m b^n$.

$a^m : a^n = a^{m-n}$, und $a^m : b^n = \frac{a^m}{b^n}$.

wo m und n jede positive oder negative Zahl sein kann.

Für die Multiplication und Division mehrtheiliger Potenzen, sind die Regeln schon angegeben worden.

Sind die Faktoren Brüche, so können selbe als solche multiplicirt werden, oder man hebt die Bruchform auf.

$$\frac{3a^m b^3}{c^4} \times \frac{5a^3 b^{2+m}}{c^{m-2}} = \frac{15a^{m+3} b^{5+m}}{c^{m+2}}.$$

oder $3a^m b^3 c^{-4} \times 5a^3 b^{2+m} c^{2-m} = 15a^{m+3} b^{5+m} c^{-2-m}$.

$$\frac{4a^3 b^{m+1}}{c^2} : \frac{5a^2 b^m}{c^{-3} d} = \frac{4a^3 b^{m+1} c^{-3} d}{5a^2 b^m c^2} = \frac{4abc^{-5} d}{5}.$$

oder $4a^3 b^{m+1} c^{-2} : 5a^2 b^m c^3 d^{-1} = \frac{4a^3 b^{m+1} c^{-2}}{5a^2 b^m c^3 d^{-1}} = \frac{4abc^{-5} d}{5}$.

49.

$(3ab)^3 = 1 . 3ab . 3ab . 3ab = 3^3 . a^3 . b^3 = 27a^3 b^3.$

$(a^3 b^{-4})^3 = 1 . a^3 b^{-4} . a^3 b^{-4} . a^3 b^{-4} = a^9 b^{-12}.$

$(a^3b^{-4})^{-5} = 1 : a^3b^{-4} : a^3b^{-4} : a^3b^{-4} = \frac{1}{a^9b^{-12}} = a^{-9}b^{12}$,

allgemein $(ab)^m = a^m b^m$.

Ein Produkt wird demnach zu einer Potenz erhoben, wenn man jeden Faktor zu dieser Potenz erhebt, und diese Potenzen mit einander multiplicirt.

Potenzen von gleichen Exponenten werden mit einander multiplicirt, wenn man das Produkt der Wurzeln zu derselben Potenz erhebt.

Potenzen werden neuerdings potenzirt, wenn man den neuen Exponent mit dem schon vorhandenen multiplicirt. Daher auch:

$$(a^p)^q)^r = a^{pqr}, \quad (a^{-p})^{-q})^{\pm r} = a^{\pm pqr},$$

$$[(-a)^{-3}]^{-5} = -a^{15}, \quad [(-a)^{-4}]^{-5} = +a^{20},$$

wobei man jedoch wegen des Zeichens der Potenz sowohl, als des neuen Exponenten sehr Acht zu geben hat.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 1 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = 1 : \frac{a}{b} : \frac{a}{b} : \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{b^3}{a^3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}.$$

$$\left[\left(-\frac{a^2}{b^3}\right)^3\right]^{-2} = +\frac{a^{-12}}{b^{-18}} = +\frac{b^{18}}{a^{12}}.$$

$$\left[\left(\frac{a^2b^3}{cd^5}\right)^{-1}\right]^{-2m} = \frac{a^{4m}b^{6m}}{c^{2m}d^{10m}}.$$

Ein Quotient wird zu einer Potenz erhoben, wenn man Dividend und Divisor zur selben Potenz erhebt, und die erstere Potenz durch die letztere dividirt.

Potenzen von gleichem Exponent, werden dividirt, wenn man den Quotient der Wurzeln zur verlangten Potenz erhebt.

Auch findet man, daß die positiven Potenzen von ächten, und die negativen von unächten Brüchen stets kleiner, die negativen Potenzen von ächten, und die positiven von unächten aber immer größer sind, als die Wurzel, und dieß um so mehr, je größer der Exponent ist. Ferner sind alle Potenzen von Brüchen, deren Zähler nicht = 1 ist, oder durch Abkürzung darauf zurückgeführt werden kann, wieder Brüche.

Aber jeder Bruch, dessen Zähler = 1 ist, gibt zu einer negati=

ven Potenz erhoben, eine ganze Zahl, und zwar die Potenz des Nenners mit positivem Exponenten.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{4} = 16 = 4^2.$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-m} = \frac{1^{-m}}{a^{-m}} = \frac{1}{a^{-m}} = a^m.$$

50.

Soll eine Größe in 2, 3 . . . n gleiche Faktoren zerlegt werden, die mit einander multiplicirt, die gegebene Größe wieder hervorbringen, so heißt so ein Faktor die 2, 3 . . . nte Wurzel der Größe.

Das Suchen einer Wurzel aus einer gegebenen Größe, heißt man das Ausziehen der Wurzel.

Das Ausziehen der Wurzel wird durch das Zeichen ($\sqrt{}$), welches der Größe, woraus die Wurzel gezogen werden soll, vorgesetzt wird, angezeigt, in dessen Oeffnung die Zahl, welche angibt, die wievielte Wurzel genommen werden soll, und welche Wurzelexponent heißt, zu stehen kommt.

Man nennt auch die Wurzeln von dem sovielten Grade, als der Wurzelexponent angibt.

$\sqrt[2]{9}$ gewöhnlicher $\sqrt{9}$ heißt die 2te, oder Quadrat-Wurzel aus 9, $\sqrt[3]{27}$ die 3te, oder Cubik-Wurzel aus 27, $\sqrt[5]{32}$ heißt 5te Wurzel aus 32 ꝛc. Je nachdem der Wurzelexponent eine gerade oder ungerade Zahl ist, heißt auch die Wurzel gerade oder ungerade.

Jeder mit dem Wurzelzeichen behaftete Ausdruck, heißt eine Wurzelgröße.

Es bedeutet aber $\sqrt[3]{8}$, man soll 8 in 3 gleiche Faktoren zerlegen, welche mit einander multiplicirt 8 geben, und einen davon nehmen. Diese sind 2, 2, 2, mithin $\sqrt[3]{8} = 2$.

Man kann daher auch sagen, die 2, 3 . . . nte Wurzel aus einer Zahl ausziehen, heißt die Zahl finden, die in der 2, 3 . . . nten Potenz die gegebene Größe zum Vorschein bringt, woraus folgt, daß der Wurzelexponent auch negativ sein kann, denn $\sqrt[-3]{64}$ heißt die Zahl finden, die in der (—3)ten Potenz 64 gibt, d. i. $\frac{1}{4}$.

Wollte man dagegen $\sqrt[3]{12}$ bestimmen, so sieht man bald, daß ein Zerfällen der Zahl 12 in 3 gleiche Faktoren nicht möglich ist, daß nemlich 2 zu klein, 3 aber zu groß sei, mithin $\sqrt[3]{12}$ nur eine Zahl zwischen 2 und 3 sein könnte. Da aber keine gemischte Zahl, in was immer für einer Potenz eine ganze Zahl hervorbringt, so ist die genaue Darstellung der 3ten Wurzel aus 12 nicht möglich, und man heißt daher $\sqrt[3]{12}$, so wie jede Wurzelgröße, deren Wurzel sich nicht vollkommen darstellen läßt, eine Irrationalzahl, während die übrigen Rationalzahlen genannt werden.

Bei weitem der größere Theil der Zahlen, sind Irrationalzahlen; so sind die Quadratwurzeln aller Zahlen von 1 — 100, mit Ausnahme von 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, und eben so die Cubikwurzeln, außer die von 1, 8, 27, 64 irrationale Zahlen, deren Werthe zwar nie genau, doch näherungsweise gefunden werden können.

Es kann daher aus jeder Zahl jede beliebige Wurzel gezogen werden, sei es nun vollständig oder näherungsweise.

Aus der Potenzentafel lernt man die rationalen einzifferigen Wurzeln kennen, so lange der Exponent unter 10 ist, z. B. $\sqrt[5]{7776} = 6$. weil $6^5 = 7776$.

Das Wurzelausziehen ist dem Potenziren gerade entgegengesetzt.

Das Auffinden der Wurzeln selbst, kann erst, da es eine eigene Rechnung fodert, später gezeigt werden.

Soll angegeben werden, daß eine Wurzelgröße mehrmal oder theilweise genommen werden soll, so muß dieß außer dem Wurzelzeichen geschehen. z. B. 4mal $\sqrt[3]{a^2}$, und $\frac{2}{3}$mal $\sqrt{a}$ wird geschrieben $4\sqrt[3]{a^2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{a}$, oder $\frac{2\sqrt{a}}{3}$.

Wurzelgrößen mit gleichen Wurzelexponenten heißen gleichnamig, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{b}$, und wenn noch die Größen unter dem Zeichen vollkommen einerlei sind, gleichartig z. B. $4\sqrt[3]{a^2}$, und $7\sqrt[3]{a^2}$.

51.

Da jede (positive oder negative) Zahl, zu einer geraden Potenz

erhoben, ein positives Produkt gibt, so hat auch jede gerade Wurzel aus einer positiven Größe die beiden Zeichen, + und —. z. B.

$$\sqrt[4]{4} = \pm 2, \quad \sqrt[4]{256} = \pm 4,$$

denn $(\pm 2)^2 = +4$, und $(\pm 4)^4 = +256$.

Anmerkung. So wie jede Quadratwurzel 2 Werthe hat, so hat auch jede Cubikwurzel eigentlich 3, und überhaupt die nte Wurzel n Werthe, deren Auffindung jedoch die Gränzen dieses Lehrbuches überschreitet. Ueber die 3 Wurzeln von $\sqrt[3]{8}$, siehe §. 58.

Ist aber der Wurzelexponent ungerade, so behalten die Wurzeln die Zeichen der Potenzen.

$$\sqrt[3]{8} = +2. \quad \sqrt[3]{-27} = -3. \quad \sqrt[5]{-32} = -2.$$

$$\sqrt[2n]{1} = \pm 1. \quad \sqrt[2n+1]{+1} = \pm 1.$$

Eine gerade Wurzel aus einer negativen Größe, kann nicht positiv, und nicht negativ sein, ist folglich gar nicht denkbar, und heißt imaginär, als Gegensatz zum reellen.

$$\sqrt[6]{-4}, \quad \sqrt[2n]{-64}, \quad \sqrt[2n]{-a}, \quad \sqrt[2n]{-1}.$$

Von diesen imaginären Größen sehe man §. 58.

52.

Aus dem Begriffe einer Wurzelgröße folgt, daß die erste Wurzel einer Größe die Größe selbst ist, und daher die niedrigste Wurzel die 2te. — Dagegen bedeutet $\sqrt{4^{-1}}$ die Größe, die in der (—1)ten Potenz 4 gibt, d. i. $\frac{1}{4}$ = der Einheit, dividirt durch die Größe unter dem Zeichen.

Die mte Wurzel der mten Potenz einer Größe, ist die Größe selbst.

$$\sqrt[3]{4^3} = 4; \quad \text{denn } \sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

allgemein $\sqrt[m]{a^m} = a$.

Man kann demnach jede Größe zur Wurzelgröße umbilden, wenn man ihr ein beliebiges Wurzelzeichen vorsetzt, und mit dem Wurzelexponent den Exponent der Größe multiplicirt.

$$a = \sqrt[3]{a^3}, \quad a^2 = \sqrt[3]{a^6} = \sqrt[6]{a^{12}} = \sqrt[n]{a^{2n}}, \quad -a^3 = -\sqrt[3]{a^6} = -\sqrt[5]{a^9}.$$

Umgekehrt zieht man aus einer Potenz, deren Exponent ein Vielfaches des Wurzelexponenten ist, die Wurzel aus, wenn man mit dem Exponent der Wurzel in den Exponent der Potenz dividirt, z. B.

$$\sqrt[4]{a^{12}} = a^{\frac{12}{4}} = a^3; \text{ denn } (a^3)^4 = a^{12}.$$

$$\sqrt[m]{a^{mn}} = a^n, \text{ weil } (a^n)^m = a^{mn} \text{ ist.}$$

Ueber eine andere Darstellung der Wurzelgrößen, deren Wurzelexponent im Exponent der Größe unter dem Zeichen enthalten ist, oder nicht, ohne Wurzelzeichen, sehe man §. 54.

Wird der Wurzelexponent, und Exponent der Größe unter dem Zeichen, mit einer und derselben Zahl multiplicirt, oder dividirt, so wird der Werth des Ausdrucks selbst nicht verändert.

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[6]{a^6} = \sqrt[9]{a^9} = a. \quad \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[12]{a^8} = \sqrt[5]{a^2}.$$

Eine Wurzelgröße mit negativem Wurzelexponent kann demnach in eine mit positivem Exponent umgewandelt werden, wenn man den Exponent der Wurzel, und der Größe unter dem Zeichen, mit (— 1) multiplicirt.

$$\sqrt[-3]{8^2} = \sqrt[3]{8^{-2}}, \quad \sqrt[-n]{a^{\pm m}} = \sqrt[n]{a^{\mp m}}.$$

Denn $\sqrt[-3]{8^2}$ heißt die Größe finden, die in der — 3ten Potenz 8^2, oder 64 gibt, d. i. $\frac{1}{4}$, und $\sqrt[3]{8^{-2}}$ heißt die Zahl finden, die in der 3ten Potenz 8^{-2}, oder $\frac{1}{64}$ gibt, was ebenfalls $\frac{1}{4}$ ist.

Wurzelgrößen mit verschiedenen Wurzelexponenten werden in solche mit gleichen Wurzelexponenten verwandelt, d. h. gleichnamig gemacht, wenn man für die sämmtlichen Wurzelexponenten einen (meistens den kleinsten) gemeinschaftlichen Dividend sucht, und nun mit dem Quotient, den man durch Division des jedesmaligen Wurzelexponenten in den gemeinschaftlichen Dividend erhält, den Wurzel- exponenten und Exponenten unter dem Zeichen multiplicirt, z. B.

$$\sqrt[3]{a^2}, \quad \sqrt[4]{a^3}, \quad \sqrt[6]{a^5}$$

der kleinste gemeinschaftliche Dividend für 3, 4, 6 ist 12, daher

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[12]{a^8}, \quad \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^9}, \quad \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^{10}}.$$

$$\sqrt[m]{a^n}, \quad \sqrt[p]{a^s}, \quad \sqrt[q]{a^r} = \sqrt[mpq]{a^{npq}}, \quad \sqrt[mpq]{a^{mqs}}, \quad \sqrt[mpq]{a^{mpr}}.$$

Die Wurzel eines Produktes ist wieder ein Produkt aus den Wurzeln der Faktoren, oder man zieht aus einem Produkte eine verlangte Wurzel aus, wenn man selbe aus jedem Faktor auszieht; und die Wurzel eines Quotienten ist wieder ein Quotient aus der Wurzel des Dividends und Divisors, oder man zieht aus einem Quotienten eine verlangte Wurzel aus, wenn man sie sowohl aus dem Dividend als dem Divisor auszieht.

$$\sqrt[m]{(ab)^m} = ab, \text{ und } (\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b^m},$$

ebenfalls $= ab$, mithin auch

$$\sqrt[m]{(ab)^m} = (\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m$$

und

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}.$$

$$\sqrt[5]{27a^{12}b^9c^{-5}} = 3a^4b^3c^{-1}.$$

Auf ähnliche Art läßt sich darthun, daß

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$\sqrt[5]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{27}} = \frac{2}{3} \qquad \sqrt{12\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}.$$

$$\sqrt[5]{\frac{3^{10}a^{-5}(a+b)^5(2+x)^{-10}}{32\,c^5d^{-15}}} = \frac{9\,d^3(a+b)}{2\,ac(2+x)^2}.$$

Aus diesen beiden Sätzen folgt, daß gleichnamige Wurzelgrößen multiplicirt, oder dividirt werden, wenn man den Wurzelexponent beibehält, und die Größen vor und unter dem Zeichen multiplicirt, oder dividirt.

$$(\sqrt[m]{a^n})^2 = \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{2n}}.$$

$$(4a\sqrt[m]{a^n})^3 = 4a\sqrt[m]{a^n} \cdot 4a\sqrt[m]{a^n} \cdot 4a\sqrt[m]{a^n} = 64\,a^3\sqrt[m]{a^{3n}}.$$

d. h. eine Wurzelgröße wird potenzirt, wenn man die Größen vor und unter dem Zeichen zur verlangten Potenz erhebt.

$$(2a\sqrt[7]{a^2b})^3 = 8a^3\sqrt[7]{a^6b^3}.$$

Da $a = \sqrt[m]{a^m}$, so ist auch $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$.

Man kann demnach jeden, vor einer Wurzelgröße stehenden Faktor

unter das Zeichen bringen, wenn man ihn auf die Potenz der Wurzel erhebt.

$$4a^{-2}b\sqrt[5]{a^3b^4} = \sqrt[5]{4^5a^{-10}b^5} \cdot a^3b^4 = \sqrt[5]{1024a^{-7}b^9}.$$

Eben so können Faktoren unter dem Zeichen, deren Exponenten größer, als der Exponent der Wurzel ist, zum Theil von dem Wurzelzeichen befreit werden, wenn man selbe in 2 Faktoren zerlegt, von denen der Exponent des einen ein Vielfaches des Wurzelexponenten ist.

$$3a\sqrt[4]{a^9b^{-10}c^3} = 3a\sqrt[4]{a^8 \cdot a \cdot b^{-8}b^{-2}c^3}$$

$$= 3a \cdot a^2b^{-2}\sqrt[4]{ab^{-2}c^3} = 3a^3b^{-2}\sqrt[4]{ab^{-2}c^3}.$$

$$\sqrt[5]{2160} = \sqrt[5]{216} \cdot 10 = 6\sqrt[5]{10}.$$

Man sieht, welche mannigfaltige Darstellung Wurzelgrößen zulassen, und daß oft Ausdrücke, welche durchaus nicht gleichbedeutend zu sein scheinen, mit Anwendung dieser Umwandlungen gleichartig werden, z. B.

$4a^{-2}b^5\sqrt[4]{16a^3b^{-1}cd^5}$, und $8a^3b^{-2}c^2d^3\sqrt[4]{a^{-17}b^{27}c^{-7}d^{-7}}$

haben einerlei Werth, da beide, wenn alle Größen unter das Zeichen gebracht werden $= \sqrt[4]{4096a^{-5}b^{19}cd^5}$ sind.

Soll aus einer Wurzelgröße abermal eine beliebige Wurzel ausgezogen werden, so darf man nur der Größe unter dem Wurzelzeichen das Produkt der Wurzelexponenten zum Wurzelexponenten geben.

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[2.3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2;$$

denn $\sqrt{64} = 8$, und $\sqrt[3]{8} = 2$.

Es bedeutet nemlich $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$, man soll 64 in 2, und einen derselben wieder in 3 gleiche Faktoren zerlegen, und einen von diesen nehmen, was dasselbe ist, als wenn man gleich 64 in $2 \times 3 = 6$ solche Faktoren zerlegt.

Allgemein also

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}.$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[-n]{a^q}} = \sqrt[-mn]{a^q}, \text{ oder } \sqrt[mn]{a^{-q}}.$$

Auch wird man jetzt die Bedeutung und Reduction solcher Wurzelgrößen, deren Wurzelexponent eine gebrochene Zahl ist, verstehen.

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^{np}}. \quad \sqrt[n]{a^{-p}} = \sqrt[m]{a^{-np}} = \sqrt[m]{a^{-np}}.$$

54.

Man hat noch eine andere Art, Wurzelgrößen darzustellen, welche wegen ihrer Einfachheit und Bequemlichkeit im Gebrauche näher betrachtet zu werden verdient.

Wenn man nemlich mit dem Exponent der Wurzel in den Exponent der Größe unter dem Zeichen dividirt, so stellt dieser gebrochene Exponent die Wurzelgröße vor, z. B.

$$\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[5]{8^2} = 8^{\frac{2}{5}}.$$

Die Bedeutung eines solchen Ausdruckes, den man Bruchpotenz nennt, ist aber, man soll die gegebene Größe in so viele gleiche Faktoren zerlegen, als der Nenner angibt, und einen davon zur Potenz des Zählers erheben, z. B. $8^{\frac{2}{3}}$, die 3 gleichen Faktoren von $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, und $2^2 = 4$, daher auch $8^{\frac{2}{3}} = 4$.

Eben so ist $8^{\frac{-2}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

Daß $8^{\frac{2}{-3}} = 8^{\frac{-2}{5}}$, und $8^{\frac{-2}{-3}} = 8^{\frac{2}{3}}$ ist leicht einzusehen. Auch ist $8^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}$, und allgemein $a^{\frac{-n}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$.

Solche Bruchpotenzen erhält man immer, so oft man eine Wurzelgröße, deren Wurzelexponent im Exponent der Größe unter dem Zeichen nicht ohne Rest enthalten ist, ohne Wurzelzeichen darstellen will.

Da $\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{np}}$, so ist auch $a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{np}{mn}}$, und umgekehrt.

Man kann demnach eine Bruchpotenz auf verschiedene Art darstellen, wenn man den Exponentenbruch im Zähler und Nenner mit einer Zahl multiplicirt, oder dividirt; so wie Potenzen mit ganzen Exponenten in Bruchpotenzen umgewandelt werden können, wenn man den ganzen Exponent in einen Bruch mit beliebigem Nenner verwandelt, z. B. $a^2 = a^{\frac{4}{2}} = a^{\frac{6}{3}} = a^{\frac{2m}{m}}$.

Umgekehrt wird jede Bruchpotenz in eine Wurzelgröße verwandelt, wenn man vor den Ausdruck ein Wurzelzeichen, und in dasselbe den Nenner des Exponentenbruches als Wurzelexponent setzt, den Zähler der Größe aber unter dem Zeichen läßt.

$$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3},\ a^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{a^3} = \sqrt{a^3}\ \text{ꝛc}$$

Potenzen mit gebrochenen Exponenten, oder Bruchpotenzen sind gleichartig, wenn sie bei gleichen Stammgrößen gleiche Exponentenbrüche haben. z. B. $4a^{\frac{2}{3}}$, und $7a^{\frac{2}{3}}$. Dagegen sind $5a^{\frac{2}{5}}$, u. $3a^{\frac{3}{4}}$ ungleichartig.

55.

Im Uebrigen werden sie wie Potenzen mit ganzen Exponenten behandelt, da der allgemeine Ausdruck a^m zuläßt, daß m eine ganze oder gebrochene Zahl sei, daher

$$9a^{\frac{1}{2}} \pm 5a^{\frac{1}{2}} = (9 \pm 5)a^{\frac{1}{2}}.$$

$$3a^{\frac{1}{2}} \times 4a^{\frac{1}{3}} = 12a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 12a^{\frac{5}{6}};\ \text{denn}$$

$$3a^{\frac{1}{2}} \times 4a^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt{a} \times 4\sqrt[3]{a} = 3\sqrt[6]{a^3} \times 4\sqrt[6]{a^2} =$$

$$12\sqrt[6]{a^5} = 12a^{\frac{5}{6}}.$$

$$4a^{-\frac{4}{5}} \times 6a^{\frac{3}{4}} = 24a^{-\frac{4}{5}+\frac{3}{4}} = 24a^{-\frac{1}{20}};$$

woraus folgt, daß auch

$$3a^2c^{-3}\sqrt[4]{a^3c^2} = 3a^2 \cdot c^{-3} \cdot a^{\frac{3}{4}}c^{\frac{2}{4}} = 3a^{\frac{11}{4}}c^{-\frac{5}{2}}.$$

Man kann also jeden Wurzelausdruck, welcher noch Potenzen als Coefficienten bei sich führt, in einen Ausdruck mit gebrochenen Exponenten verwandeln, wenn man die Exponenten gleichnamiger Buchstaben addirt.

$$15a^{\frac{3}{5}} : 3a^{\frac{1}{2}} = 5a^{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}} = 5a^{\frac{1}{10}}.\ \text{Denn}$$

$$15a^{\frac{3}{5}} : 3a^{\frac{1}{2}} = 15\sqrt[5]{a^3} : 3\sqrt{a} =$$

$$15\sqrt[10]{a^6} : 3\sqrt[10]{a^5} = 5\sqrt[10]{a} = 5a^{\frac{1}{10}}.$$

Auch ist

$$\left(3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}}\right)^3 = 1 \cdot 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}} \cdot 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}} \cdot 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}} = 27a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{6}{5}}.$$

$$\left(4a^{\frac{5}{4}}b^{-\frac{1}{2}}c\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}}a^{\frac{5}{4}}b^{-\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{2}} = 2a^{\frac{5}{4}}b^{-\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{5}}}{3b^{\frac{1}{4}}}\right)^4 = \frac{a^2c^{\frac{8}{5}}}{81b}, \quad \left(\frac{a^{\frac{2}{5}}c^2}{b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{a^{-\frac{4}{9}}c^{-\frac{4}{3}}}{b^{-1}} = \frac{b}{a^{\frac{4}{9}}c^{\frac{4}{3}}}.$$

$$\sqrt[5]{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}c^{-\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}c^{-\frac{2}{9}}.$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^{\frac{5}{6}}}} = \sqrt[12]{a^{\frac{5}{6}}} = a^{\frac{5}{6}:12} = a^{\frac{5}{72}}.$$

$$\sqrt[\frac{3}{4}]{a^{\frac{5}{6}}} = a^{\frac{5}{6}:\frac{3}{4}} = a^{\frac{10}{9}}.$$

$$\sqrt[-\frac{2}{3}]{\sqrt[\frac{3}{5}]{a^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[-\frac{2}{5}]{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}:-\frac{2}{5}} = a^{-\frac{5}{4}}.$$

woraus die Regeln des Potenzirens und Ausziehens der Wurzeln von Bruchpotenzen hervorgehen.

56.

Die vier Rechnungsarten mit Wurzel-, oder Radicalgrößen bieten keine besondere Schwierigkeit mehr dar, sobald man sich in der verschiedenen Darstellung, und den Veränderungen derselben Fertigkeit und schnellen Ueberblick erworben hat.

Die Addition und Subtraction gleichartiger Wurzelgrößen besteht in der Addition und Subtraction ihrer Coefficienten; ungleichartige werden nur durch das Zeichen verbunden.

$$3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3}. \quad 3a\sqrt[3]{a^2} \pm 5b\sqrt[3]{a^2} = (3a \pm 5b)\sqrt[3]{a^2}.$$

$$4\sqrt{12} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.4 + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 13\sqrt{3}.$$

$$7\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{128} = 8\sqrt[3]{2}.$$

$$4a\sqrt[3]{a^{-2}c} + 5a^{-3}\sqrt[3]{a^5c^{-1}} = 4\sqrt[3]{ac} + 5\sqrt[3]{ac} = 9\sqrt[3]{ac}.$$

$$\sqrt{54a^5b} - 2a\sqrt{24ab^3} - 4ab\sqrt{54a^3b^5} + 3a\sqrt{24a^3b} - 2\sqrt{96a^3b^3} + 2a^2\sqrt{216ab^7} + \sqrt{96ab^5} = 9a^2\sqrt{6ab} - 12ab\sqrt{6ab} + 4b^2\sqrt{6ab} = (9a^2 - 12ab + 4b^2)\sqrt{6ab}.$$

$$15\sqrt[3]{2ab}\sqrt{3ab} - \frac{8b\sqrt[5]{3a}\sqrt{\frac{1}{2}a}}{\sqrt[6]{6b}} + \frac{12a\sqrt[3]{b}\sqrt{96b}}{\sqrt[6]{2a}} = 35\sqrt[6]{72a^5b^5}.$$

Gleichnamige Wurzelgrößen werden multiplicirt, wenn man die Größen vor und nach dem Zeichen mit einander multiplicirt,

$5\sqrt{5} \times 7\sqrt{\frac{8}{3}} \times \sqrt{2} = 140.$ $3\sqrt[4]{ab^2} \times 4\sqrt[4]{a^2b^{-5}} = 12\sqrt[4]{a^3b^{-1}}.$

$$\sqrt[12]{\frac{a}{bc}} \times \sqrt[8]{\frac{a^m}{b}} = \sqrt[24]{\frac{a^{3m+2}}{b^5c^2}}, \text{ oder}$$

$$\sqrt[12]{ab^{-1}c^{-1}} \times \sqrt[8]{a^mb^{-1}} = \sqrt[24]{a^{3m+2}b^{-5}c^{-2}}.$$

$a^2b \times \sqrt[m]{a^2b^3} = a^2b\sqrt[m]{a^2b^3}$, oder

$$\sqrt[m]{a^{2m}b^m} \times \sqrt[m]{a^2b^3} = \sqrt[m]{a^{2m+2}b^{m+3}}.$$

$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{3^2} - \sqrt{2^2} = 3 - 2 = 1.$

$(9 + 2\sqrt{10})(9 - 2\sqrt{10}) = 41.$

$(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} - 5\sqrt{20} - 2\sqrt{2}) = -174 + 42\sqrt{10}.$

$$\left(\sqrt{\frac{ad^2}{c^3}} + \sqrt{\frac{a^2}{b}}\right) \times (\sqrt{ac} + \sqrt{b^3}) =$$

$$\frac{ad}{c} + ab + a\sqrt{\frac{ac}{b}} + \frac{b^2d}{c^2}\sqrt{\frac{ac}{b}}.$$

Gleichnamige Wurzelgrößen werden in einander dividirt, wenn man die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen dividirt; ungleichnamige werden zuvor gleichnamig gemacht.

$36\sqrt[3]{24} : 9\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{8}$, $a : \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a^m} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a^{m-1}}.$

$$\sqrt[5]{ab^{n-1}c^2} : \sqrt[5]{\frac{a^3b^2}{dc^{n-1}}} = \sqrt[5]{\frac{b^{n-3}c^{n+1}d}{a^2}}.$$

$3 : \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9}$, $\sqrt[5]{64} : 2 = \sqrt[5]{64} : \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2}.$

$c\sqrt{(a^2 - x^2)} : \sqrt{(a + x)} = c\sqrt{(a - x)}.$

$(a^3 - \sqrt[3]{b^4}) : (\sqrt{a^3} + \sqrt[3]{b^2}) = \sqrt{a^3} - \sqrt[3]{b^2}).$

$$(5a^2\sqrt[12]{a} - 41ab\sqrt[12]{a} + 42b^2\sqrt[12]{a}) : \left(\sqrt[3]{a} - \frac{7b}{\sqrt[3]{a^2}}\right) = 5\sqrt[4]{a^7} - \frac{6ab}{\sqrt[4]{a}}.$$

$(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}) : (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt[4]{ab}.$

$(a^3 - 2\sqrt[4]{a^2b^3} - a^2\sqrt[6]{a^3b^2} + 2b\sqrt[12]{b}) : (\sqrt{a} - \sqrt[5]{b}) = a^2\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{b^3}.$

$(\sqrt{72} + \sqrt{32} - 4) : \sqrt{8} = \sqrt{9} + \sqrt{4} - \sqrt{2} = 5 - \sqrt{2}.$

$(\sqrt{8} + \sqrt[5]{12} + \sqrt[4]{2}) : 2\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt[6]{18} + \frac{1}{4}\sqrt[4]{8}.$

Sämmtliche Beispiele von Wurzelgrößen können zugleich, und zwar nicht selten viel bequemer, als Bruchpotenzen, berechnet werden, wodurch man sich von dem Uebereinstimmen in den Resultaten überzeugen kann.

57.

In Ausdrücken, welche ein irrationales Monom, oder Binom zum Nenner haben, und bei welchen keine wirkliche Division möglich ist, ist es nicht selten vortheilhaft, den irrationalen Nenner rational zu machen. Man multiplicire den Zähler und Nenner mit einem Faktor, so daß die Faktoren der Größe unter dem Wurzelzeichen im Nenner den Wurzelexponent zum Exponent erhalten, z. B.

$$\frac{5}{\sqrt{2^3}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2^2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{18}{\sqrt[4]{9^2}}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[12]{9^2}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[6]{9}} = \frac{\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[6]{9^5}}{\sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[6]{9^5}} = \frac{\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[6]{9^5}}{\sqrt[6]{9^6}} = \frac{\sqrt[6]{18^2 \cdot 9^5}}{9}.$$

$$\frac{5a^2}{3\sqrt[3]{ac^2}} = \frac{5a^2 \times \sqrt[3]{a^2c}}{3\sqrt[3]{ac^2} \times \sqrt[3]{a^2c}} = \frac{5a^2\sqrt[3]{a^2c}}{3ac} = \frac{5a\sqrt[3]{a^2c}}{3c}.$$

Wenn der Nenner ein Binom von der Form $a \pm \sqrt{b}$, oder $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ist, so wird derselbe durch Multiplication des Zählers und Nenners mit $a \mp \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ rational, z. B.

$$\frac{3}{3 - \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot (3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{3 \cdot (3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{9 + 3\sqrt{2}}{7}.$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(a + \sqrt{b})}} = \frac{\sqrt[n]{(a - \sqrt{b})}}{\sqrt[n]{(a + \sqrt{b}) \cdot \sqrt[n]{(a - \sqrt{b})}}} = \frac{\sqrt[n]{(a - \sqrt{b})}}{\sqrt[n]{a^2 - b}} =$$

$$\sqrt[n]{\frac{(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}}.$$

$\sqrt{3} + \sqrt{2} : \sqrt{3} - \sqrt{2} = 5 + 2\sqrt{6}.$

$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} : (\sqrt{2} + 3\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{10}.$

Da $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{c}$, und $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) + (\sqrt{c} + \sqrt{d})$ ist, so kann auch ein Bruch, dessen Nenner ein Trinomium, oder Quadrinomium ist, auf ähnliche Weise im Nenner rational werden; denn

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{m \cdot [(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{c}]}{[(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}][(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}]} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{a + b + 2\sqrt{ab} - c} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{(a + b - c) + 2\sqrt{ab}},$$

wo der irrationale Theil des Nenners wieder durch Multiplication von $(a + b - c) - 2\sqrt{ab}$ entfernt wird.

$$1 : (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = \frac{\sqrt{30}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{10}}{3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{27\sqrt{5} + 7\sqrt{30} - 30\sqrt{2} - 15\sqrt{3}}{10}.$$

Von den imaginären Größen.

58.

Man versteht darunter solche Ausdrücke, für die sich keine wirkliche Größe als Werth angeben läßt, wie alle gerade Wurzeln aus negativen Größen.

$\sqrt{-a}$, oder allgemein $\sqrt[2n]{-a}$.

Da aber $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{-1}$, so läßt sich demnach jede imaginäre Größe als Produkt zweier Faktoren, deren einer $\sqrt[2n]{a}$, d. i. eine reelle Größe, und deren anderer $\sqrt[2n]{-1}$, der allgemeine Stellvertreter der imaginären Wurzelgrößen, ist, darstellen.

Anmerkung. Obwohl also für imaginäre Größen sich keine Werthe angeben lassen, d. h. selbe nicht existiren, so dürfen sie doch nicht von den Rechnungen ausgeschlossen werden, ja sie sind sogar nothwendig, und die Mathematik würde durch dieses Ausschließen eines Theils der Vollständigkeit verlustig, da solche Ausdrücke, wie $\sqrt[2n]{-a}$ schon nach dem Gesetze der Stetigkeit nothwendig sein müssen, andererseits bei jeder Aufgabe, außer der Frage, welches der gesuchte Werth dieser oder jener Größe aus andern bestimmenden Größen sei, auch die zweite Frage aufgeworfen werden kann, ob denn die Größe für diesen oder jenen Werth der bestim-

menden überhaupt nur möglich sei. So hat z. B. in der Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ die Größe x keinen reellen Werth. Dieß beantwortet die Mathematik eben durch unmögliche Größen, indem sie sagt: x sei hier $= 1 \pm \sqrt{-2}$, d. h. die Aufgabe ist gar nicht möglich. Enthält demnach das Resultat einer Rechnung eine imaginäre Größe, so ist dieß entweder ein Zeichen von einer unrichtigen Annahme und unmöglichen Forderung, oder beweist, daß die Form, die man dem Resultate aufdringen wollte, unmöglich sei. So lange sie aber nicht als Endresultate erscheinen, sind sie beizubehalten, und die Rechnung fortzuführen, weil sie, so wie sie aus reellen Größen entstanden, durch umgekehrte Operation, oder Verbindung mit andern, wieder reell werden können.

Als allgemeine Formen der Wurzeln unterwerfen sich die imaginären Größen allen Rechnungsarten.

Addition und Subtraction.

$6\sqrt{-a} \pm 4\sqrt{-a} = (6 \pm 4)\sqrt{-a}.$

$6\sqrt{-a} \pm 3\sqrt{-b} = 6\sqrt{-a} + 3\sqrt{-b}.$

$3\sqrt{-ac^2} \pm 2c\sqrt{-a} = 3c\sqrt{-a} \pm 2c\sqrt{-a} = (3 \pm 2)\,c\sqrt{-a}.$

$\sqrt{-36} - \sqrt{-64} = 6\sqrt{-1} - 8\sqrt{-1} = -2\sqrt{-1}.$

Multiplication und Division.

$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} =$
$\sqrt{ab} \cdot -1 = -\sqrt{ab}.$

$-5a\sqrt{-a} \times 5b\sqrt{-a} = -5a\sqrt{(-1)a} \times 5b\sqrt{(-1)a}$
$= -25ab\sqrt{(-1)^2} \cdot a^2 = -25a^2b \cdot -1 \cdot = 25a^2b.$

$\sqrt[4]{-a} \cdot \sqrt[4]{-a} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}.$

$\sqrt[6]{-a} \cdot \sqrt[6]{-a} = \sqrt[6]{(-a)^2} = \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}.$

$(a + \sqrt{-b})\,(a - \sqrt{-b}) = a^2 + b.$

$(9 + 6\sqrt{-1})\,(3 + 7\sqrt{-1}) = -15 + 81\sqrt{-1}.$

$(-1 + \sqrt{-3})\,(-1 + \sqrt{-3}) = -2 - 2\sqrt{-3}.$

$(-2 - 2\sqrt{-3})\,(-1 + \sqrt{-3}) = 8;$ mithin

$(-1 + \sqrt{-3})\,(-1 + \sqrt{-3})\,(-1 + \sqrt{-3}) =$

$(-1 + \sqrt{-3})^3 = 8,$ oder $\sqrt[3]{8} = (-1 + \sqrt{-3});$

also $(-1 + \sqrt{-3})$ eben so gut eine Cubikwurzel aus 8, wie 2. — Auch $(-1 - \sqrt{-3})^3 = 8$, folglich auch $-1 - \sqrt{-3}$ eine dritte Wurzel von 8, wodurch die obige Behauptung erwiesen, daß jede dritte Wurzel 3 Werthe habe.

$$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

$$1 : \sqrt{-1} = \frac{1 \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{-1} = -\sqrt{-1}.$$

$$\sqrt{-ab} : \sqrt{a} = \frac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}\sqrt{-1} = \sqrt{-b}.$$

$$-\sqrt{ab} : \sqrt{-b} = \frac{-\sqrt{ab} \cdot \sqrt{-b}}{\sqrt{-b} \cdot \sqrt{-b}} = \frac{-b\sqrt{-a}}{-b} = \sqrt{-a}.$$

$$(2\sqrt{8} - \sqrt{-10}) : -\sqrt{-2} = \sqrt{5} - 4\sqrt{-1}.$$

$$6 : (1 + \sqrt{-2}) = 2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1}.$$

$$(a^2 + b) : (a + \sqrt{-b}) = (a - \sqrt{-b}).$$

Man sieht, daß, wenn eine einfache imaginäre Größe mit einer einfachen derselben Art multiplicirt, oder durch eine solche dividirt wird, eine reelle Größe zum Vorschein komme.

$$(\sqrt{-1})^0 = +1,\ (\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^2 = -1,$$
$$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^4 = +1.$$

Da nun auch $(\sqrt{-1})^0 = +1$, so beginnt mit der 5ten Potenz dieselbe Potenzenreihe wieder, so daß die 5te Potenz $= (\sqrt{-1})$, 6te -1 u. s. w. ist, überhaupt $(\sqrt{-1})^{4n+1} = \sqrt{+1}$, $(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1$, $(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}$, und $(\sqrt{-1})^{4n} = +1$.

Es folgt daraus, daß die geraden Potenzen von $\sqrt{-1}$ immer reell, und zwar $= +1$, wenn der Exponent durch 4, -1, wenn er durch 2 theilbar ist, alle ungeraden unmöglich, und zwar positiv, oder negativ, je nachdem der Wurzelexponent durch 4 getheilt, 1 oder 3 übrig läßt.

$$\sqrt[3]{\sqrt[6]{-1}} = \sqrt{-1} = (\sqrt{-1}) \text{ allgemein}$$
$$\sqrt[2(n+1)]{-1} = \sqrt[2n+1]{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1};$$

d. h. alle gerade Wurzeln aus -1, deren Wurzelexponent, durch 2 getheilt, eine ungerade Zahl gibt, sind $= \sqrt[2^n.m]{-1}$.

Dagegen lassen sich alle Wurzeln von der Form $\sqrt{-1}$ nicht auf $(\sqrt{-1})$ reduciren.

B. Mehrtheiliger Größen.

59.

Obwohl hier die Potenzen mehrtheiliger Größen überhaupt vorgetragen werden, so wollen wir doch zuerst die 2te und 3te Potenz

und Wurzel, wegen ihres häufigen Gebrauches, etwas ausführlicher behandeln. Von den negativen und gebrochenen Potenzen zusammengesetzter Größen, sehe man beim binomischen Lehrsatz.

Dem von einer Potenz aufgestellten Begriffe zufolge ist $(a \pm b)^2 = 1 . (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$, welche Formel, da für $(a \pm b)$ was immer für zwei Größen gesetzt werden können, also allgemein ist, und sagt:

das Quadrat einer zweitheiligen Größe besteht:

1) aus dem Quadrat des ersten Theils,
2) aus dem doppelten Produkte des ersten in den zweiten Theil, und
3) aus dem Quadrat des zweiten Theils.

Es wird daher jede zweitheilige Größe nach dieser allgemeinen Vorschrift zur zweiten Potenz erhoben werden können; so erhalten wir für

$$(4x + 5y)^2 = 16x^2 + 40xy + 25y^2.$$

$$(\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a})^2 = a + 6\sqrt[6]{a^5} + 9\sqrt[3]{a^2}.$$

$$\left(\frac{3a^{-2}c}{4} - \frac{5ac^{-5}}{3}\right)^2 = \frac{9a^{-4}c^2}{16} - \frac{5a^{-1}c^{-2}}{2} + \frac{25a^2c^{-6}}{9}.$$

$$\left(\frac{3}{2} + 2x - 7x^2\right)^2 = \frac{9}{4} + 6x - x^2 - 28x^3 + 49x^4.$$

$$\left(a^m x^n + 5ca^{m-2}x^{n+1} - \frac{3a}{x}\right)^2 = a^{2m}x^{2n} + 10ca^{2m-2}x^{2n+1} -$$

$$6a^{m+1}x^{n-1} + 25c^2a^{2m-4}x^{2n+2} - 30ca^{m-1}x^n + \frac{9a^2}{x^2}.$$

Zerlegt man was immer für eine Zahl in zwei Theile, so findet man auf eben diese Weise ihr Quadrat, z. B. $5 = 3 + 2 = 6 - 1$.

$(3 + 2)^2 = 9 + 12 + 4 = 25 = 5^2$.

$(6 - 1)^2 = 36 - 12 + 1 = 25 = 5^2$.

$$(1)^2 = \left(\frac{5}{9} + \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{25}{81} + \frac{40}{81} + \frac{16}{81} = \frac{81}{81} = 1.$$

Das Quadrat von a ist $= a^2$, und das Quadrat von $a + 1 = a^2 + 2a + 1$; folglich $(a + 1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1$, d. h. man erhält aus dem Quadrat einer Zahl das Quadrat der nächst höhern, wenn man die doppelte erste Zahl um eins vermehrt, zu ihrem Quadrat addirt. z. B.

$(12)^2 = 144$, und $(13)^2 = 144 + 2 \times 12 + 1 = 169$.

Allgemein ist das Quadrat von a von dem von $(a + n)$ um $2an + n^2$ unterschieden.

Bildet man die Quadrate von $(a + b + c)$, $(a + b + c + d)$, $(a + b + c + d + e)$, so ist

$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$.

$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$.

$(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + b^2 + 2bc + 2bd + 2be + c^2 + 2cd + 2ce + d^2 + 2de + e^2$.

Aus einem Vergleiche dieser Produkte ergibt sich, daß die Quadrate mehrtheiliger Größen bestehen:

1) aus den Quadraten der einzelnen Glieder,
2) aus den doppelten Produkten eines jeden Gliedes in alle folgende.

Da eine zweitheilige Größe im Quadrate 3, eine dreitheilige 6, eine viertheilige 10, eine fünftheilige 15 Glieder gab, so drückt $\frac{n \cdot (n + 1)}{1 \cdot 2}$ die Gliederzahl des Quadrates einer ntheiligen Größe aus.

Da $1^2 = 1$
$9^2 = 81$
$10^2 = 100$
$99^2 = 9801$
$100^2 = 10000$
$999^2 = 998001$

ist, so erkennt man hieraus das Gesetz, welches die Zahlen, zum Quadrat erhoben, hinsichtlich der Anzahl der Ziffer befolgen, nemlich: eine einzifferige Zahl gibt entweder eine ein- oder zweizifferige, eine zweizifferige enthält im Quadrat 3, oder 4, eine dreizifferige 4, oder 5, d. h. das Quadrat einer ganzen Zahl hat entweder noch einmal so viel Ziffer oder eine weniger, als die gegebene Zahl, mithin eine nzifferige Zahl entweder 2n, oder $2n - 1$ Ziffer. Eine Zahl mit Null am Ende enthält quadrirt das Quadrat der bedeutenden Ziffer, und 2mal so viel 0, als die Wurzel.

$(30)^2 = 900$, $(400)^2 = 160000$, $(5000)^2 = 25000000$.

Auch ist $(0,5)^2 = 0,25$; $(0,13)^2 = 0,0169$;
$(0,012)^2 = 0,000144$, und $(4,3)^2 = 18,49$.
$(2,96)^2 = 8,7616$, $(12,006)^2 = 144,144036$.

woraus hervorgeht, daß, wenn ein Decimalbruch, oder eine ganze Zahl nebst einem solchen, quadrirt wird, das Quadrat stets 2mal so viel Decimalstellen enthält, als die Wurzel.

60.

Da nach dem vorigen §. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, und $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$ ist, so müssen auch die Wurzeln aus diesen Ausdrücken wieder $(a + b)$, und $(a + b + c)$ sein.

Um aber aus $a^2 + 2ab + b^2$ die Quadratwurzel $(a + b)$ zu erhalten, verfahre man also:

Man nehme die Wurzel aus dem ersten Theil, und setze diese als den ersten Theil der gesuchten Wurzel neben bei, quadrire selbe, und ziehe dieß Quadrat vom ersten Glied des gegebenen Quadrates ab, so bleiben noch zwei Glieder übrig, deren eines das doppelte Produkt des ersten und zweiten Theils, das andere das Quadrat des zweiten Theiles ist.

Um nun den zweiten Theil der Wurzel zu finden, nehme man den gefundenen ersten doppelt, und theile mit diesem Produkte in das zweite Glied des gegebenen Quadrates, und schreibe diesen Quotient als den zweiten Theil der Wurzel neben den gefundenen ersten. Multiplicirt man nun diesen zweiten Quotient mit dem Divisor, und noch überdieß mit sich selbst, so wird, wenn man diese zwei Produkte vom gegebenen Quadrat abzieht, kein Rest mehr übrig bleiben, und die Wurzel ist nun gefunden.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b \\ -a^2 \\ \hline \quad\; 2ab + b^2 \\ \quad\; (2a) \\ \quad\; 2ab + b^2 \\ \quad\; - \qquad - \\ \hline \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{25x^4}{36} - \frac{10x^2z^3}{9} + \frac{4z^6}{9}} = \frac{5x^2}{6} - \frac{2z^3}{3}.$$

$$\sqrt{4x^{2m} + 2x^{m+2}y^n + \frac{x^4y^{2n}}{4}} = 2x^m + \frac{x^2y^n}{2}.$$

$$\sqrt{\frac{a^2x^2 + 2ab^2x^3 + b^4x^4}{a^{2m} - 2a^m x^n + x^{2n}}} = \frac{ax + b^2x^2}{a^m - x^n}.$$

Daß solche zusammengesetzte Ausdrücke wieder nach den höchsten Potenzen irgend eines Buchstaben geordnet sein müssen, versteht sich von selbst.

Enthält aber ein gegebenes Quadrat mehr als drei Glieder, so bleibt nach Vollzug des so eben angegebenen Verfahrens noch ein Rest übrig, zum Beweise, daß die gefundene Wurzel noch nicht vollständig sei. Um daher das noch Fehlende zu finden, betrachte man die gefundenen Theile der Wurzel als eine Größe, und wiederhole das ganze Verfahren, z. B.

$$\sqrt{a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4} = a^2 - 2ab - 2b^2$$

$$\begin{array}{l}
-a^4 \\
\hline
\text{»} \quad -4a^3b + 8ab^3 \\
\qquad (2a^2) \\
\quad -4a^3b + 4a^2b^2 \\
\quad + \qquad - \\
\hline
\qquad \text{»} \quad -4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \\
\qquad\quad (2a^2 - 4ab) \\
\qquad\quad -4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \\
\qquad\quad + \qquad - \qquad - \\
\hline
\qquad\qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»}
\end{array}$$

$$\sqrt{1 - 4x + 10x^2 - 12x^3 + 9x^4} = 1 - 2x + 3x^2.$$

$$\sqrt{9x^4 - 3ax^3 + 6bx^3 + \frac{a^2x^2}{4} - abx^2 + b^2x^2} = 3x^2 - \frac{ax}{2} + bx.$$

$$\sqrt{\frac{a^4}{4} - 3a^3b + 2b^2 + \frac{3a^2}{4} + 9a^2b^2 - 12a^{-1}b^3 - \frac{9ab}{2} +}$$

$$4a^{-4}b^4 + 3a^{-2}b^2 + \frac{9}{16} = \frac{a^2}{2} - 3ab + 2a^{-2}b^2 + \frac{3}{4}.$$

Bei wirklichen Berechnungen stößt man nicht selten auf unvollständige Quadrate, deren Wurzel angegeben werden soll.

Das Verfahren bleibt sich gleich, und die Wurzel wird dabei nie vollständig, jedoch desto genauer gefunden, je weiter die Rechnung fortgesetzt wird. Auch ist das Gesetz dieses Fortschreitens meistens leicht zu erkennen; so ist

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \ldots$$

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \ldots$$

In vielen Fällen bleibt es jedoch blos bei dem Vorsetzen des Zeichens, wie bei den quadratischen Gleichungen zu ersehen ist.

61.

Das Ausziehen der Quadratwurzel aus Zahlen (ganzen, gemischten und gebrochenen) ist bekanntlich das Zerfällen der gegebenen Zahlen in zwei gleiche Faktoren, daher die gegebene Zahl stets positiv sein muß, die Wurzel aber positiv und negativ sein kann. Sind die Zahlen klein, so daß das Zerfällen leicht möglich ist, z. B. $\sqrt{81} = \pm 9$, $\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}$, so ist hiezu kein besonderes Verfahren nöthig, und die Wurzel in der Potenzentafel §. 45. zu treffen.

Wenn dagegen die Zahl sich nicht in zwei gleiche Faktoren, welche ganze Zahlen sind, zerlegen läßt, z. B. 50, 68, $\frac{5}{6}$ ꝛc., oder dieselbe zu groß ist, die Faktoren leicht zu finden, so geschieht, da Zahlen nichts anders, als Polynomen nach den Potenzen von 10 geordnet, sind, das Ausziehen der Quadratwurzel, wie bei mehrtheiligen allgemeinen Größen. Vor allem kann man schon aus der Anzahl der Ziffer der gegebenen Zahl auf die Anzahl der Ziffer der Wurzel schließen, indem bei $(2n)$, oder $(2n - 1)$ Ziffer die Wurzel n Ziffer hat.

1) Man theile daher die gegebene Zahl in Klassen, indem man, von der Rechten anfangend, zu jeder Klasse zwei Ziffer nimmt. Die höchste Klasse kann auch eine einzige enthalten; die Wurzel enthält dann stets so viel Ziffer als Ganze, als Klassen vorhanden sind.
2) Nun nimmt man die Wurzel aus der ersten, oder höchsten Klasse, und wenn die Ziffer derselben kein reines Quadrat sind, die nächst kleinere, welche Ziffer die erste der Wurzel ist; dieser erste Theil der Wurzel wird quadrirt, und von der ersten Klasse abgezogen.
3) Zu dem allenfallsigen Reste setzt man blos die nächste Klasse herab, nimmt hierauf das Doppelte der gefundenen ersten Ziffer,

setzt es mit seiner niedrigsten Ziffer unter die höchste (erste) der herabgesetzten Klasse, und dividirt durch dasselbe die darüber stehende Zahl.

4) Um zu prüfen, ob der gefundene Quotient die zweite Ziffer ist, setzt man ihn in die noch offene Stelle hinter dem Doppelten der ersten Ziffer, und multiplicirt die ganze daraus entstehende Zahl mit ihm. Läßt sich das Produkt von der darüberstehenden Zahl abziehen, so ist die zweite Ziffer richtig gefunden, wo nicht, so verkleinert man den Quotient allmählig um eins, so lange, bis er jener Bedingung Genüge leistet.

5) Für den fernern Verlauf der Operation gilt die Regel: Man nehme jedesmal zu dem Reste, der bei dem Auffinden einer folgenden Ziffer der Wurzel geblieben ist, die nächst niedrige Klasse der gegebenen Zahl herunter, und verfahre mit der Zahl, welche die schon gefundenen Ziffer der Wurzel darstellen, in Beziehung auf diesen Rest, wie man mit der ersten verfuhr, um die zweite zu finden.

6) Bleibt, nachdem man mit der letzten Klasse dieß Verfahren durchgemacht hat, kein Rest, so ist die gefundene Zahl genau die Quadratwurzel; bleibt aber ein Rest, so ist die gefundene Zahl zu klein, und fällt zwischen die bereits gefundene und nächst höhere Zahl, weßwegen auch, wenn es die Genauigkeit der Rechnung fodert, das noch Fehlende als Decimalbruch ausgedrückt wird, indem man zu dem Reste der letzten Klasse statt jeder neuen Klasse zwei 0 beisetzt, im Uebrigen aber das Verfahren ganz beibehält. Man beendigt hiebei die Arbeit nach dem erfoderlichen Grade der Genauigkeit. Sollte der Dividend kleiner sein, als der Divisor, so erhält man 0 als Quotient in die Wurzel, und die nächste Klasse wird gleich herabgeschrieben, und das Verfahren fortgesetzt. Hat die gegebene Zahl am Ende mehrere Null, so erhält man für jedes Paar, in der Wurzel ein Null.

7) Soll aus Decimalbrüchen die Quadratwurzel gezogen werden, so muß, wenn die Anzahl der Decimalstellen ungerade ist, dieselbe durch Anhängen von Null gerade gemacht werden; da nemlich das Quadrat jedes Decimalbruches eine gerade Anzahl Ziffer (nemlich zweimal so viel als die Wurzel) hat, so muß auch ein

Decimalbruch so beschaffen sein, wenn aus ihm die Quadratwurzel gezogen werden soll. Das übrige Verfahren ist dasselbe. Daraus folgt zugleich, daß, wenn ganze Zahlen mit Decimalbrüchen vorkommen, die Ganzen und die Decimalen eigens abgetheilt werden. Im letzten Falle enthält auch die Wurzel nur so viele Ziffer als Ganze, als Klassen aus den Ganzen vorhanden sind. Daß die Quadratwurzel aus Ganzen mit Decimalen, wenn letztere paarweise vorhanden sind, rational sein kann, versteht sich von selbst.

8) Da ferner ein Bruch zum Quadrat erhoben wird, wenn man Zähler und Nenner quadrirt, so muß auch bei Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Bruch, aus dem Zähler und Nenner die Wurzel gezogen werden. Weil aber hiebei die Operation doppelt, und wenn Zähler und Nenner nicht reine Quadrate sind, überdieß sehr schwierig ist, so verwandelt man den Bruch entweder in einen Decimalbruch, und zieht aus diesem die Wurzel, oder man multiplicirt Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit einer Zahl, daß der Nenner ein reines Quadrat wird, zieht dann aus Zähler und Nenner die Wurzel aus, und dividirt mit dem Nenner in die Wurzel des Zählers.

9) Gemischte Zahlen werden in uneigentliche Brüche aufgelöst, und (wie Nro. 8) behandelt.

$$\sqrt{75|69} = 87$$

64

1169

167 *)

1169

...

---

*) Da aus der Zahl zu ersehen war, daß die Wurzel zwei Ziffer hat, so ist 8 nicht als Einheit, sondern als Zehner zu betrachten, daher der Divisor eigentlich nicht 16, sondern 160 ist, wozu der zweite Theil der Wurzel, 7, addirt, 167 zum Vorschein kommt. Man läßt daher diese 0 stets weg, und setzt den Divisor um eine Stelle vorwärts, und an die leere Stelle den zuletzt gefundenen Theil der Wurzel. Da aber jede Ziffer in Bezug auf die nächste ein Zehnfaches ist, so ist dieß bei jeder Klasse der Fall.

$\sqrt{27|35|29} = 523$

25

235

102

204

3129

1043

3129

...

$\sqrt{49|84|36} = 706$

49

84

14

8436

1406

8436

...

$\sqrt{46|06|66} = 678,72\ldots$

36

1006

127

889

11766

1348

10784

98200

13567

94969

323100

135742

271484

51616.

$\sqrt{52,|99|84} = 7,28$

49

399

142

284

11584

1448

11584

...

$$\sqrt{0,06|25} = 0,25$$

4
225
45
225
...

$$\sqrt{0,63897} = \sqrt{0,|63|89|70} = 0,7993\ldots$$

49
1489
149
1341
14870
1589
14301
56900
15983
47949
8951 Rest.

$$\sqrt{68395,126} = \sqrt{6|83|95,|12|60} = 261,52$$

4
283
46
276
795
521
27412
5225
26125
128760
52302
104604
24156 Rest.

$$\sqrt{\frac{121}{324}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{324}} = \frac{11}{18}.$$

$$\sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2,64575\ldots}{3} = 0,88191\ldots \text{ oder}$$

$$\sqrt{\frac{7}{9}} = \sqrt{0,777777} = 0,88191\ldots$$

$$\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5}{6} \times \frac{6}{6}} = \sqrt{\frac{30}{36}} = \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{5,47722}{6}\ldots =$$

0,91287 . ., oder $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{0,833333} = 0,9128\ldots$

$\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

$\sqrt{3\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{11}{3}} = \sqrt{\frac{11}{3} \times \frac{3}{3}} = \sqrt{\frac{33}{9}} = \frac{\sqrt{33}}{3} =$

$\frac{5,74456}{3} \ldots = 1,91485.$

$\sqrt{25836889} = 5083$, $\sqrt{1607448649} = 40093$, $\sqrt{3} = 1,732\ldots$

$\sqrt{9,6} = 3,09838\ldots$, $\sqrt{0,056} = 0,23664\ldots$, $\sqrt{0,003} = 0,05477\ldots$

$\sqrt{1\frac{3}{4}} = 1,32287\ldots$, $\sqrt{\frac{5}{12}} = 0,64549\ldots$

Zum Beweise, wie sehr man sich bei irrationalen Zahlen, auch bei nicht lange fortgesetzter Rechnung dem Werthe der Wurzel nähert, erhebe man $\sqrt{3} = 1,732$ zum Quadrat, so erhält man 2,999824, welches von 3 ganz unbedeutend unterschieden ist.

62.

Erhebt man die zweitheilige Größe $(a \pm b)$ zur dritten Potenz, so ist $(a \pm b)^3 = 1.(a \pm b)(a \pm b)(a \pm b) = 1.(a^2 \pm 2ab + b^2)(a \pm b) = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

Es besteht demnach die dritte Potenz einer zweitheiligen Größe aus der 3ten Potenz des ersten Theils, dem dreifachen Quadrate des ersten in den zweiten Theil, aus dem dreifachen ersten in das Quadrat des zweiten, und aus dem Quadrat des zweiten Theils. Es ist demnach

$(2a^2 - 5ay)^3 = 8a^6 - 60a^5y + 150a^4y^2 - 125a^3y^3$.

$\left(2 - \frac{x^{3p-1}}{2}\right)^3 = 8 - 6x^{3p-1} + \frac{3x^{6p-2}}{2} - \frac{1}{8}x^{9p-3}$.

$(3a\sqrt[3]{a^2} - 5y\sqrt[3]{a^2})^3 = 27a^5 - 135a^4y + 225a^3y^2 - 125a^2y^3$.

$15^3 = (10 + 5)^3 = 1000 + 1500 + 750 + 125 = 3375$.

$15^3 = (20 - 5)^3 = 8000 - 6000 + 1500 - 125 = 3375$.

$1^3 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = 1$.

Da $(a)^3 = a^3$, und $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ ist, so ist auch $(a + 1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1$.

Man findet demnach aus dem Cubus einer Zahlen der nächsthöheren, wenn man zu dem gegebenen Cubus das dreifache Qua=

drat, das dreifache der Wurzel, und 1 dazu zählt, da $10^3 = 1000$, so ist $(11)^3 = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331$. Ferner ist

$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

$(a + b + c + d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3ab^2 + 6abc + 6abd + 3ac^2 + 6acd + 3ad^2 + b^3 + 3b^2c + 3b^2d + 3bc^2 + 6bcd + 3bd^2 + c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$.

woraus folgt, daß der Cubus einer mehrtheiligen Größe enthalte: die dritten Potenzen aller Glieder, die dreifachen Produkte eines jeden Gliedes in das Quadrat der Summe aller vorhergehenden, und die dreifachen Produkte des Quadrates eines jeden Gliedes in die Summe aller vorhergehenden. Für n Theile $\frac{n.(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ Glieder.

Man kann sich die Bildung der einzelnen Theile eines mehrtheiligen Cubus dadurch erleichtern, daß man die mehrtheilige Größe auf eine zweitheilige reducirt, z. B. für $(a+b+c)^3 = [(a+b)+c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$ setzt, und nun jedes Glied wieder nach den obigen Gesetzen berechnet. Eben so für

$(a + b + c + d)^3 = [(a + b) + (c + d)]^3$.

$(3x^2 - 2xy + y^2)^3 = 27x^6 - 54x^5y + 63x^4y^2 - 44x^3y^3 + 21x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$.

Aus $1^3 = 1$
$9^3 = 729$
$10^3 = 1000$
$99^3 = 970299$
$100^3 = 1000000$
$999^3 = 997002999$

folgt, daß eine einzifferige Zahl im Cubus 1 bis 3, eine zweizifferige 4 bis 6, eine dreizifferige 7 bis 9, überhaupt eine nzifferige $(3n-2)$ bis $3n$ Ziffer enthalte.

Auch ist $20^3 = 8000$
$300^3 = 27000000$
$4000^3 = 64000000000$

d. h. eine Zahl, welche am Ende Null bei sich führt, enthält im Cubus den Cubus der bedeutenden Ziffer, und dreimal so viel 0 als die Wurzel.

$(0,2)^3 = 0,008$, $(0,12)^3 = 0,001728$.
$(0,025)^3 = 0,000015625$, $(2,3)^3 = 12,167$.
$(2,58)^3 = 17,173512$.

d. h. Decimalbrüche haben im Cubus stets dreimal so viel Stellen, als die Wurzel.

63.

Um aus dem Ausdruck $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$ die Cubikwurzel $(a + b)$ zu finden, verfahre man also: Man ziehe aus dem ersten Theil die Wurzel, erhebe diese zum Cubus, und ziehe diesen Cubus vom ersten Gliede der gegebenen Reihe ab.

Um den zweiten Theil zu finden, erhebe man den ersten gefundenen zum Quadrat, und nehme dieß Quadrat dreimal; mit diesem dreifachen Quadrate dividire man in den zweiten Theil der Reihe, so erhält man den zweiten Theil der Wurzel. Man bilde nun der Ordnung nach die Produkte: das dreifache Quadrat des ersten Theils multiplicirt mit dem zweiten Theil, das dreifache Quadrat des zweiten Theils multiplicirt mit dem ersten, und den Cubus des zweiten, ziehe diese 3 Produkte ab, so ist die Wurzel gefunden. Hat sich bei diesem Aufsuchen des zweiten Theils die ganze Reihe noch nicht aufgehoben, so betrachte man die beiden gefundenen Theile der Wurzel als einen, und wiederhohle das ganze Verfahren so oft, bis die angegebene Reihe verschwindet, oder erkenntlich wird, daß die Reihe kein vollständiger Cubus ist.

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$$

$$\begin{array}{l} -a^3 \\ \hline \text{»} \quad 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \quad (3a^2) \\ \quad 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \quad - \quad - \quad - \\ \hline \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \end{array}$$

$$\sqrt[5]{343a^6 - 441a^5b + 777a^4b^2 - 531a^3b^3 + 444a^2b^4 - 144ab^5 - 64b^6} = 7a^2 - 3ab + 4b^2$$

$$\begin{array}{l} -343a^6 \\ \hline \text{»} \quad -441a^5b + 777a^4b^2 - 531a^3b^3 \\ \quad (147a^4) \\ \quad -441a^5b + 189a^4b^2 - 27a^3b^3 \\ \quad + \quad - \quad + \\ \hline \text{»} \quad 588a^4b^2 - 504a^3b^3 + 444a^2b^4 - 144ab^5 + 64b^6 \\ \quad (147a^4 - 126a^3b + 27a^2b^2) \\ \quad 588a^4b^2 - 504a^3b^3 + 444a^2b^4 - 144ab^5 + 64b^6 \\ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \\ \hline \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \end{array}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8a^3c^3x^7}{27b^3} - \frac{4a^2cx^6}{3b} + \frac{2abx^5}{c} - \frac{b^3x^4}{c^3}} = \left(\frac{2acx^2}{3b} - \frac{bx}{c}\right)\sqrt[3]{x}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^6}{y^3} - \frac{bx^5}{y^2} + \frac{15x^4}{y} - 20x^3 + 15x^2y - bxy^2 + y^3} = \frac{x^2}{y} - 2x + y.$$

64.

Die Cubikwurzel aus Zahlen, welche keine reine Cubikzahlen, oder zum Zerfällen in drei gleiche Faktoren durch den bloßen Ueberblick zu groß sind, zu finden, verfahre man also:

1) Man theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je 3 Ziffern. (Die letzte kann demnach 3, 2 oder 1 Ziffer haben).

2) Nehme die Wurzel aus der ersten Klasse, cubire diese Wurzel, und ziehe selbe von der ersten Klasse ab; zum allenfallsigen Rest setze man eine neue Klasse herab, welche durch das dreifache Quadrat des ersten Theils der Wurzel so dividirt wird, daß die letzte Ziffer stets unter der ersten der herabgesetzten Klasse steht; der erhaltene Quotient ist der zweite Theil der Wurzel. Nun bilde man die 3 Produkte: das dreifache Quadrat des ersten, multiplicirt mit dem zweiten Theil, das Quadrat des zweiten mit dem dreifachen ersten, und den Cubus des zweiten Theils, welche so unter einander gesetzt werden, daß die letzte Ziffer des ersten Produktes unter die letzte des Divisors, jedes folgende Produkt um eine Ziffer weiter zurück zu stehen kommt, addire diese Produkte, und ziehe ihre Summe von der obenstehenden Zahl ab. (Wenn die Summe der 3 Produkte größer ist, als der Dividend, so hat man den Quotient zu groß genommen. Eben so muß im Quotient 0 gesetzt werden, wenn der Divisor größer als der Dividend ist, worauf zum Dividend die nächste Klasse herabgesetzt wird). Ist die gegebene Zahl noch nicht zu Ende, so setze man die nächste Klasse herab, betrachte die beiden Theile der Wurzel als einen, und wiederhole das Verfahren. Bleibt, nachdem alle Klassen herabgesetzt wurden, ein Rest übrig, so ist dieß ein Beweis, daß die gegebene Zahl keine reine Cubikzahl ist; man findet daher die Wurzel näherungsweise, wenn man stets neue Klassen von drei 0 herabsetzt, und das angegebene Verfahren wiederholt. Da man hiebei die Wurzel nie genau

finden kann, so entscheidet wieder der Zweck der Aufgabe, wie viel Decimalstellen gesetzt werden sollen.

3) Die Cubikwurzel aus einem Decimalbruch zu finden, muß sich die Anzahl der Decimalstellen mit 3 ohne Rest theilen lassen, die allenfalls fehlenden Stellen durch 0 ergänzt werden.

4) Enthält eine Zahl Ganze und Decimalstellen, so müssen die Ganzen und die Decimalstellen wieder für sich (nach Nro. 1 und 3) abgetheilt werden.

5) Brüche werden, wenn nicht Zähler und Nenner reine Cubikzahlen sind, entweder in Decimalbrüche verwandelt, oder der Bruch im Zähler und Nenner mit einer Zahl multiplicirt, so daß der Nenner ein reiner Cubus wird, was immer, falls man keine kleinere Zahl ausfindig machen kann, durch Multiplication des Quadrates des Nenners geschieht, und (jedoch mit Beibehalt des eigenen Verfahrens) nach Nro. 8 des §. 61. behandelt.

6) Gemischte Zahlen werden in uneigentliche Brüche aufgelöst.

7) Die Zahl, woraus die Cubikwurzel gezogen werden soll, kann positiv oder negativ sein, und die Wurzel hat stets dasselbe Zeichen.

$$\sqrt[3]{340|068|392} = 698$$

216

124068

(108)

972

1458

729

112509

11559392

(14283)

114264

13248

512

11559392

$$\sqrt[3]{11089567} = 223, \quad \sqrt[5]{64481201} = 401.$$

$$\sqrt[3]{27000000} = 300, \quad \sqrt[5]{12} = 2{,}289\ldots$$

$$\sqrt[3]{0{,}63815} = \sqrt[3]{0{,}638150} = 0{,}8609\ldots$$

$\sqrt[3]{1458,23} = 11,287$, $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$.

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6} \cdot \frac{6^2}{6^2}} = \sqrt[3]{\frac{180}{216}} = \frac{\sqrt[3]{180}}{6} = \frac{5,646}{6} \ldots$$

$= 0,941 \ldots$, oder

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{0,83333 \ldots} = 0,941.$$

$$\sqrt[3]{4\frac{5}{9}} = \sqrt[3]{\frac{41}{9}} = \sqrt[3]{\frac{41}{9} \cdot \frac{3}{3}} = \sqrt[3]{\frac{123}{27}} = \frac{\sqrt[3]{123}}{3} =$$

$\frac{4,973}{3} \ldots = 1,657 \ldots$, oder

$$\sqrt[3]{4\frac{5}{9}} = \sqrt[3]{4,555555 \ldots} = 1,657 \ldots$$

Dasselbe Verfahren wie §. 63. wird wieder zu der Ausziehung der Cubikwurzel aus unvollständigen dritten Potenzen angewendet. z. B.

$$\sqrt[3]{a^3 - x^3} = a - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} - \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} - \ldots$$

$$\sqrt[3]{1 + x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \ldots$$

Von dem binomischen Lehrsatze.

65.

Der Satz, welcher die Gesetze jeder Potenz einer zweitheiligen Größe angibt, heißt der binomische Lehrsatz (Theorema binomiale).

In den vorhergehenden §§. haben wir gesehen, daß

$(a \pm b)^1 = a \pm b.$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$

und wenn man die höhern Potenzen durch bloße Multiplication erzeugt, erhält man

$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4.$

$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$

$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6.$

Aus einem Vergleiche dieser Potenzen von (a + b) ergeben sich folgende Eigenschaften derselben:

1) Die Reihe hat (m + 1) Glieder, wenn der Exponent m ist.
2) Der Exponent von a ist im ersten, und von b im letzten Glied, dem Exponent der Potenz gleich.
3) Die Exponenten von a fallen in jedem folgenden Gliede um 1 bis zu $a^0 = 1$, welches im letzten Gliede als Multiplicator verschwindet, und die von b steigen von 0 bis zum Exponent der Potenz.
4) Die Summe der Exponenten ist in jedem Gliede gleich, und zwar = dem Exponent der Potenz, und die Summe aller Exponenten = m . (m + 1), wenn m den Exponent anzeigt.
5) Die Coeffizienten befolgen ein unabänderliches Gesetz. Man sieht nemlich, daß der Coeffizient des ersten Gliedes stets 1, der des zweiten stets dem Exponent der Potenz gleich sei, und daß überhaupt jeder Coeffizient der Reihe einem Bruche gleiche, dessen Zähler das Produkt aller Exponenten von a von allen hervorgehenden Gliedern, und dessen Nenner das Produkt so vieler in natürlicher Ordnung fortlaufender Zahlen ist, als Glieder vorhergehen.
6) Die Summe der Coeffizienten von $(a + b)^m$ ist allzeit $= 2^m$, von $(a - b)^m = 0$.
7) Auch bemerkt man, daß die Coeffizienten bis in die Mitte der Reihe steigen, und dann in derselben Ordnung wieder abnehmen, so daß die Coeffizienten der Glieder, welche gleichweit vom ersten und letzten abstehen, einander gleich sind. Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so ist der Coeffizient des mittleren der größte, ist sie gerade, so gibt es zwei mittlere (und gleiche).
8) Ist ein oder der andere Theil des Binomiums negativ, so folgt aus §. 47., daß jene Glieder der Reihe, wo der negative Theil in einer geraden Potenz erscheint, positiv, die übrigen aber negativ sind. Für (a — b) sind alle ungeraden Glieder positiv, die geraden negativ.

Will man daher eine allgemeine Formel für die mte Potenz von (a + b) aufstellen, so ist diese unter folgendem Ausdruck gegeben:

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 + \pm$$

$$\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4$$

$$+ \ldots mab^{m-1} + b^m, \text{ und}$$

$$\pm \frac{m.(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}a^{m-n+1}b^{n-1}.$$

das nte Glied der mten Potenz, und zwar positiv für alle Glieder von $(a + b)^m$, und für die ungeraden von $(a - b)^m$, aber negativ für die geraden von $(a - b)^m$.

Diese allgemeine Formel zeigt auch, daß für jede (ganze) Potenz die Reihe der Glieder einmal ein Ende nehmen müsse, und zwar, wenn $m - n + 2 = 0$, mithin das ganze Glied, so wie jedes folgende selbst 0 wird. Da aus $m - n + 2 = 0$ für $n = m + 2$ folgt, so bricht demnach jede Reihe bei dem $(m + 2)$ten Glied ab, wenn m der Exponent ist, und hat also $(m + 1)$ Glieder.

Um nemlich ein beliebiges Glied einer zweitheiligen Potenz zu finden, z. B. das siebente Glied von $(a \pm b)^{10}$, ziehe man von dem um 1 vermehrten Exponent der Potenz die Zahl des verlangten Gliedes ab, so ist der Rest der Exponent von a, folglich auch der von b bekannt, im gegebenen Falle also $(11 - 7) = 4$, daher a^4b^6, wozu der Coeffizient: $\frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6} = 210$ gehört, mithin das siebente Glied von $(a \pm b)^{10} = + 210a^4b^6$.

Es ist demnach keiner Schwierigkeit unterworfen, jede zweitheilige Größe zu was immer für einer Potenz zu erheben, z. B.

$$(4a^2c - 5b^2d^3)^4 = (4a^2c)^4 + 4.(4a^2c)^3.(-5b^2d^3) +$$
$$6.(4a^2c)^2.(-5b^2d^3)^2 + 4.(4a^2c).(-5b^2d^3)^3 +$$
$$(-5b^2d^3)^4 = 256a^8c^4 - 1280a^6c^3b^2d^3 + 2400a^4c^2b^4d^6 -$$
$$2000a^2cb^6d^9 + 625b^4d^{12}.$$

$$(3 - 2x^2)^6 = 729 - 2916x^2 + 4860x^4 - 4320x^6 +$$
$$2160x^8 - 576x^{10} + 64x^{12}.$$

$$\left(4x^2 + \frac{m^3}{2}\right)^5 = 1024x^{10} + 640x^8m^3 + 160x^6m^6 + 20x^4m^9 +$$
$$\frac{5x^2m^{12}}{4} + \frac{m^{15}}{32}.$$

$$(1 + \sqrt{x})^7 = 1 + 7\sqrt{x} + 21x + 35x\sqrt{x} + 35x^2 +$$
$$21x^2\sqrt{x} + 7x^3 + x^3\sqrt{x}.$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^4 = a^2 + 6ab + b^2 - 4(a + b)\sqrt{ab}.$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt[5]{a^2b^4})^4 = a^2 + 4a^2b\sqrt[6]{ab^2} + 6a^2b^2\sqrt[3]{ab^2} + 4a^2b^4\sqrt{a} + a^2b^5\sqrt[3]{a^2b}.$$

Daß aber in diesen Reihen keine Regelmäßigkeit in den Gliedern zu bemerken ist, kommt von den, den Gliedern des Binomiums beigegebenen, Coeffizienten und Exponenten her, die sich mit den Coeffizienten und Exponenten der binomischen Reihe verbinden. Die Regelmäßigkeit ist aber doch in der Reihe vorhanden, und nur scheinbar verschwunden.

Das 5te Glied von $(a + b)^{16}$ ist $= 1820a^{12}b^4$.
» 9te » » $(2ab - cd)^{14}$ » $= 192192a^6b^6c^8d^8$.
» 4te » » $(3ac - 2bd)^5$ » $= -720a^2c^2b^3d^3$.
» 6te » » $\left(\frac{2ac}{b^2} + \frac{1}{4}bc^2d\right)^6$ » $= \frac{3ab^3c^{11}d^5}{256}$.

$(15)^4 = (10 + 5)^4 = 10000 + 20000 + 15000 + 5000 + 625 = 50625.$

$(32)^5 = (30 + 2)^5 = 24300000 + 8100000 + 1080000 + 72000 + 2400 + 32 = 33554432.$

So wie nach §. 59., und 62 die Gränzen für die Anzahl der Ziffer einer nzifferigen Zahl im Quadrat $2n$, und $2n - 1$, im Cubus $3n$, und $3n - 2$ waren, so sind sie es für die mte Potenz mn, und $mn - (m - 1)$, d. h. die mte Potenz einer nzifferigen Zahl hat höchstens mn, und wenigstens $mn - (m - 1) = mn - m + 1 = (n - 1)m + 1$ Ziffer.

66.

Eine mehr als zweigliedrige Größe mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes zu potenziren, reducire man selbe auf 2, und verfahre, wie gewöhnlich, z. B. $(a + b + c)^5$.

Nimmt man für $a + b = d$, so ist $(a + b + c)^5 = (d + c)^5 = d^5 + 5d^4c + 10d^3c^2 + 10d^2c^3 + 5dc^4 + c^5$, welche Reihe, für d stets $(a + b)$ substituirt, in folgende übergeht:

$$(a + b + c)^5 = (a + b)^5 + 5(a + b)^4 c + 10(a + b)^3c^2 + 10(a + b)^2c^3 + 5(a + b)c^4 + c^5,$$

woraus endlich, wenn die angezeigten Potenzen von $(a + b)$ gebildet werden,

$$(a + b + c)^5 = a^5 + 5a^4b + 5a^4c + 10a^3b^2 + 20a^3bc + 10a^3c^2 + 10a^2b^3 + 30a^2b^2c + 30a^2bc^2 + 10a^2c^3 + 5ab^4 +$$

$20ab^3c + 30ab^2c^2 + 20abc^3 + 5ac^4 + b^5 + 5b^4c + 10b^3c^2 + 10b^2c^3 + 5bc^4 + c^5$.

$(a + b + c + d)^4$; ſetzt man $(a + b) = p$, $(c + d) = q$, ſo iſt $(a + b + c + d)^4 = (p + q)^4 = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$, und für p und q die Werthe ſubſtituirt, iſt $(a + b + c + d)^4 = (a + b)^4 + 4(a + b)^3 (c + d) + 6(a + b)^2 (c + d)^2 + 4(a + b) (c + d)^3 + (c + d)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 4a^3d + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 12a^2bd + 6a^2c^2 + 12a^2cd + 6a^2d^2 + 4ab^3 + 12ab^2c + 12ab^2d + 12abc^2 + 24abcd + 12abd^2 + 4ac^3 + 12ac^2d + 12acd^2 + 4ad^3 + b^4 + 4b^3c + 4b^3d + 6b^2c^2 + 12b^2cd + 6b^2d^2 + 4bc^3 + 12bc^2d + 12bcd^2 + 4bd^3 + c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4$.

Für $(a + b + c + d + e + \ldots,)^n$ iſt, wenn m die Anzahl der Glieder vorſtellt, die Summe der Glieder

$$= \frac{(m + 1)\ (m + 2) \ldots (m + n - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n - 1)n}$$

die Summe der Exponenten in jedem Gliede n, und wenn die Gliederzahl p iſt, die Summe aller Exponenten np

$$= \frac{m \cdot (m + 1)\ (m + 2) \ldots (m + n - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n - 1)}$$

die Summe der Coeffizienten $= m^n$.

Der Satz, welcher die Geſetze der Bildung von Potenzen mehrtheiliger Größen überhaupt angibt, heißt der polynomiſche Lehrſatz.

Wie man umgekehrt wieder aus dieſen Potenzen zwei- oder mehrtheiliger Größen die Wurzeln finden könne, iſt aus dem Verfahren bei der Ausziehung der zweiten und dritten Wurzel ſichtbar, kann jedoch, da es im praktiſchen Rechnen ſehr ſelten vorkommt, hier übergangen werden. Von weit größerer Wichtigkeit ſind die höhern Wurzeln aus Zahlen, welche nun ebenfalls als Potenzen mehrtheiliger Größen betrachtet, und mit Hilfe der binomiſchen Reihe, freilich nicht ſelten ſehr mühſam, ganz dem bei der Ausziehung der 2ten und 3ten Wurzel angewandten Verfahren ähnlich, gefunden werden.

Da uns jedoch, wie weiter unten gezeigt wird, ein ganz allgemeines und höchſt einfaches Verfahren zu Gebot ſteht, ſo mag dieß zur Entſchuldigung dienen, die höhern Wurzeln aus Zahlen hier übergangen zu haben.

Läßt sich der Wurzelexponent in zwei oder mehrere kleinere Faktoren zerlegen, so kann manchmal eine höhere Wurzel durch wiederholtes Ausziehen niederer Wurzeln gefunden werden, z. B.

$\sqrt[6]{1771561} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{1771561}}$, und da $\sqrt[3]{1771561} = 121$, und $\sqrt{121} = 11$, so ist $\sqrt[6]{1771561} = 11$.

$\sqrt[8]{390625} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{390625}}} = 5$, $\sqrt[9]{40353607} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{40353607}} = 7$.

$\sqrt[12]{4096} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[3]{4096}}} = 2$.

67.

Der binomische Lehrsatz ist auch noch für den Fall gültig, daß der Exponent eine ganze negative, oder gebrochene (positive oder negative) Größe ist. Um aber dann die allgemeine Formel zu erhalten, setze man nur statt m, nach und nach

$(-m)$, $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(-\frac{m}{n}\right)$, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$(a+b)^{-m} = \frac{1}{(a+b)^m} = a^{-m} - ma^{-m-1}b + \frac{m.(m+1)}{1.2}a^{-m-2}b^2 - \frac{m.(m+1)\,(m+2)}{1.2.3}a^{-m-3}b^3 + -$$

+ (ohne Ende).

z. B. $(a+b)^{-2} = a^{-2} - 2^{-3}b + 3a^{-4}b^2 - 4a^{-5}b^3 + 5a^{-6}b^4 - 6a^{-7}b^5 + \ldots$

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a+b)^m} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}a^{\frac{m-n}{n}}b + \frac{m(m-n)}{1.2n^2}a^{\frac{m-2n}{n}}b^2 + \frac{m(m-n)\,(m-2n)}{1.2.3n^3}a^{\frac{m-3n}{n}}b^3 + \ldots$$

$$(x+y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y - \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}y^2 + \frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}y^3 - \ldots$$

$$(a+b)^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{(a+b)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{(a+b)^m}} = a^{\frac{-m}{n}} - \frac{m}{n}a^{\frac{-m-n}{n}}b + \frac{m(m+n)}{1.2n^2}a^{\frac{-m-2n}{n}}b^2 - \frac{m(m+n)\,(m+2n)}{1.2.3n^3}a^{\frac{-m-3n}{n}}b^3 + \ldots$$

$$(a+b)^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}b + \frac{3}{8}a^{-\frac{5}{2}}b^2 - \frac{5}{16}a^{-\frac{7}{2}}b^3 + \ldots$$

Daß in diesen drei Fällen die Reihe nie ein Ende nehmen kann, geht daraus hervor, weil weder ein Bruch, noch eine negative ganze Zahl $= 0$ werden kann, wenn sie fortwährend um 1 abnimmt; die Reihen sich aber nur dann schließen, wenn ein solcher Faktor Null wird.

Die Sätze $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ dienen sehr bequem zur Ausziehung einer beliebigen Wurzel aus unvollständigen Potenzen, und da $(a+x)^{-m} = \frac{1}{(a+x)^m}$, ferner $\frac{n}{a+x} = n(a+x)^{-1}$ ist, so können auch Brüche in unendliche Reihen umgewandelt werden, wie §. 43.

$$\sqrt[5]{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{5}} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} - \ldots$$

$$\sqrt{m^2+n^2} = (m^2+n^2)^{\frac{1}{2}} = m + \frac{n^2}{2m} - \frac{n^4}{8m^3} + \frac{n^6}{16m^5} - \frac{5n^8}{128m^7} + \ldots$$

$\sqrt[10]{(1+x)^{10}(1-x)} = (1+x)\sqrt[10]{1-x}$; es ist aber

$$\sqrt[10]{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{x}{10} - \frac{9x^2}{200} - \frac{171x^3}{6000} - \frac{4959x^4}{240000}, \text{ welche Reihe mit } (1+x) \text{ multiplicirt} = 1 + \frac{9x}{10} - \frac{29x^2}{200} - \frac{147x^3}{2000} - \frac{3933x^4}{80000} \ldots$$

$$\frac{3a}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{3a}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 3a(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}, \text{ da nun}$$

$$(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{3y^4}{8} - \frac{5y^6}{16} + \ldots \text{ gibt, so ist}$$

$$\frac{3a}{\sqrt{1+y^2}} = 3a\left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{3y^4}{8} - \frac{5y^6}{16} + \ldots\right) = 3a - \frac{3ay^2}{2} + \frac{9ay^4}{8} - \frac{15ay^6}{16} + \ldots$$

$$\sqrt{a^2+b} = (a^2+b)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} - \frac{5b^4}{128a^7} + \ldots$$

$$\sqrt[3]{a^3+b} = (a^3+b)^{\frac{1}{3}} = a + \frac{b}{3a^2} - \frac{b^2}{9a^5} + \frac{5b^3}{81a^8} - \frac{10b^4}{243a^{11}} + \ldots$$

Die beiden letzten Sätze sind sehr bequem zur Ausziehung der 2ten und 3ten Wurzel aus unvollständigen Potenzen von Zahlen, da sich jede Zahl in 2 zerlegen läßt, deren eine ein vollständiges Quadrat, oder Cubus ist, z. B.

$$\sqrt{20} = \sqrt{16+4}, \quad \sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3}.$$

Von den Verhältnissen und Proportionen.

68.

Die Vergleichung zweier gleichartiger Dinge nur in Bezug auf ihre Größe heißt ein Verhältniß.

Diese Vergleichung kann man anstellen: 1) dadurch, daß man die kleinere der zu vergleichenden Größen von der größern abzieht, oder 2) dadurch, daß man nachsieht, wie vielmal die eine in der andern enthalten ist. Das erstere heißt ein arithmetisches, das andere ein geometrisches Verhältniß, obwohl diese Benennungen mit der Sache selbst in keiner Verbindung stehen, sondern willkürliche Annahmen sind.

Die Bezeichnung eines arithmetischen Verhältnisses geschieht durch Verbindung der zu vergleichenden Größen mit einem Querstrich, die eines geometrischen mit zwei Punkten, z. B.:

3 — 5, oder allgemein a — b, a — (a ± d) arithmetisch.

4 : 12 » » a : b, a : aq geometrisch.

Das Ergebniß aus beiden, d. h. die Größe, welche den Unterschied, oder den Quotient der verglichenen Dinge angibt, heißt Verhältnißexponent (Verhältniß-Zeiger), die Größen aber, welche verglichen werden, nennt man die Glieder des Verhältnisses, von welchen wieder das erste Vorder-, das zweite Hinterglied genannt wird; so sind in 3 — 7, und 5 : 30, die Exponenten 4 und 6, 3 und 5 Vorder-, 7 und 30 Hinterglieder.

Der Exponent bestimmt die Größe des Verhältnisses, daher heißen Verhältnisse gleich, welche gleiche Verhältniß-Exponenten haben, sonst ungleich. 2 — 5, und 7 — 10, 3 : 9, und 5 : 15.

Rational heißen Verhältnisse, deren Exponent vollständig zu bestimmen ist, sonst irrational, $5 : 20$ ist rational, $3\sqrt{2} : 7\sqrt{3}$ irrational.

Geometrische Verhältnisse zwischen Irrationalgrößen können manchmal rational sein, z. B.

$$3\sqrt{5} : 12\sqrt{5},\ 2\sqrt{3} : 3\sqrt{12}\ \text{ꝛc.}$$

Jedes irrationale Verhältniß läßt sich annäherungsweise rational machen, so ist z. B.

$$2\sqrt{3} = 2 \times 1{,}732\ldots \text{ und } 3\sqrt{10} = 3 \times 3{,}162\ldots$$

$$\text{also } 2\sqrt{3} : 3\sqrt{10}, \text{ wie } 3464 : 9486.$$

Sind die Zeichen der Exponenten gleich, so heißen die Verhältnisse gleiche übereinstimmende, sind selbe verschieden, gleiche, aber entgegengesetzte:

$+3 : +12$ $+4 : +16$	$-3 : -12$ $-4 : -16$	gleiche übereinstimmende, da der Exponent $+4$ ist.
$+3 : +12$ $+3 : -12$	$-3 : -12$ $+4 : -16$	gleiche entgegengesetzte, da der Exponent einmal $+4$, das anderemal -4 ist.

Endlich heißt ein Verhältniß überhaupt ab-, oder zunehmend, je nachdem das Hinterglied kleiner, oder größer, als das Vorderglied ist. Es sind demnach $4 — 6$, und $2 : 8$ zunehmende, $6 — 4$, und $8 — 2$ abnehmende Verhältnisse.

Wechselt man in einem Verhältnisse die beiden Glieder, so ist das neu entstandene in Bezug auf das erstere das umgekehrte, oder indirecte, und das erstere das gerade, oder directe.

69.

Da Verhältnisse gleich sind, wenn ihre Exponenten gleich groß sind, so ist jede Veränderung der Verhältnisse erlaubt, wodurch ihre Exponenten unverändert bleiben, was sich bei arithmetischen auf Addition und Subtraction einer Größe zu den Verhältniß-Gliedern, bei geometrischen auf Multiplication und Division erstreckt; so sind $5 — 7$, und $(5 \pm 3) — (7 \pm 3)$ gleich, da überall 2 Exponent ist, eben so $6 : 9$, und $(6 \times 3) : (9 \times 3)$, und $\frac{6}{3} : \frac{9}{3}$, wo beiderseits $1\frac{1}{2}$ Exponent ist.

Aus letzterem folgt, daß das geometrische Verhältniß zweier Brüche, deren Nenner gleich sind, dem Verhältnisse ihrer Zähler gleiche, z. B. $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$, wie 1 : 3; da aber alle Brüche, und gemischte Zahlen auf gleiche Benennung gebracht werden können, so kann jedes Verhältniß zweier gebrochenen Größen auf ein Verhältniß ganzer Zahlen gebracht werden.

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{10}{15} : \frac{9}{15} = 10 : 9.$$

Es erklärt sich nun auch das Verfahren, jedes gegebene Verhältniß auf die einfachste Form zu bringen, d. h. in den möglichst kleinsten Zahlen darzustellen. So ist

6 — 13 mit (6 — 5) — (13 — 5), d. i. mit 1 — 8
u. 27 : 72 » $\frac{27}{9} : \frac{72}{9}$ » » 3 — 8
} einerlei.
allgemein a — b mit [a — (a — 1)] — [b — (a — 1)]

a : b » $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, wo c den größten gemeinschaftlichen Theiler, und daher $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ ganze Zahlen bedeuten.

Eben so ist $a : b = \frac{a}{a} : \frac{b}{a} = 1 : \frac{b}{a}$, d. h. wie 1 zum Exponent.

Multiplicirt man mehrere geometrische Verhältnisse mit einander, so heißt das daraus entstandene ein zusammengesetztes.

3 : 12	Exponent 4;	a : aq	Exponent	q.
7 : 21	» 3;	b : bm	»	m.
21 : 252	» 12;	c : cn	»	n.
		abc : abcqmn	»	qmn.

oder auch 1 : qmn.

Es folgt daraus, daß der Quotient des zusammengesetzten Verhältnisses dem Produkte aus den Quotienten der einfachen zusammenzusetzenden Verhältnisse gleich sei. Sind dabei die einfachen zusammenzusetzenden Verhältnisse einander gleich, so ist der Quotient des zusammengesetzten jederzeit eine Potenz des Quotienten von einem der einfachen Verhältnisse, und zwar 2, 3 . . . nte Potenz, je nach-

dem 2, 3 . . . n gleiche Verhältnisse zusammengesetzt werden. Man pflegt deßwegen auch die aus 2, 3, 4 . . . gleichen Verhältnissen zusammengesetzten quadratische, cubische, biquadratische ꝛc. zu nennen.

$$a : aq;$$
$$b : bq;\ ab : abq^2 = 1 : q^2$$
$$c : cq;\ abc : abcq^3 = 1 : q^3$$
$$d : dq;\ abcd : abcdq^4 = 1 : q^4.$$

70.

Das Zusammenstellen zweier gleichen arithmetischen, oder geometrischen Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen, heißt eine arithmetische, oder geometrische Proportion. Eine solche besteht demnach aus 4 Gliedern, deren 1. und 4tes äußere, 2. und 3tes innere, oder mittlere Glieder heißen, so wie das 1. und 3te Vorder-, das 2. und 4te Hinterglieder genannt werden. Die beiden Vorder- und Hinterglieder heißen die homologen (gleichnamigen) Glieder.

Allgemeine Formen der Proportionen:

$$a - (a \pm d) = b - (b \pm d).$$
$$a : aq = b - bq.$$

Sind die mittlern Glieder gleich, so heißt die Proportion stetig (continua), sonst unterbrochen, oder abgesondert (discreta). Erstere werden nicht selten statt

$a - b = b - d$, so bezeichnet $a - b - d$
und $a : b = b : d$, „ $a : b : d$.

Von den arithmetischen Proportionen.

71.

Nach §. 70 sind alle arithmetischen Proportionen unter der Formel gegeben:

1) $a - (a \pm d) = b - (b \pm d)$ im Allgemeinen;
2) $a - (a \pm d) = (a \pm d) - (a \pm 2d)$ für stetige;

oder in Zahlen:

$$5 - 7 = 9 - 11$$
$$8 - 15 = 15 - 22.$$

Werden in den beiden allgemeinen Ausdrücken der arithmetischen Proportionen die äußern und innern Gliedern addirt, so erhält man aus

1. die Summe der äußern $a + (b \pm d)$
» » » innern $b + (a \pm d)$
2. » » » äußern $a + (a \pm 2d)$
» » » innern $(a \pm d) + (a \pm d)$, oder in Zahlen

$$5 + 11 = 7 + 9, \text{ und } 8 + 22 = 15 + 15;$$

d. h. in jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der innern.

Aus dieser allgemeinen Eigenschaft der arithmetischen Proportionen ergibt sich auch die Regel zur Auffindung:

1) des vierten Gliedes einer arithmetischen Proportion, wenn 3 gegeben sind.

$a - (a \pm d) = b - ?$ Nennt man das fehlende Glied x, so erhält man

$a - (a \pm d) = b - x$ $\qquad 5 - 7 = 9 - x$

$a + x = b + (a \pm d)$ $\qquad 5 + x = 7 + 9$

$x = b + a \pm d - a = b \pm d.$ $\qquad x = 7 + 9 - 5 = 11$, wie oben.

Daß das fehlende Glied jede Stelle einnehmen kann, ist aus der Aufgabe leicht zu errathen, und man kann daher sagen:

Fehlt ein äußeres Glied, so addire man die beiden innern, und ziehe das gegebene äußere davon ab, so ist der Rest das gesuchte äußere; fehlt ein inneres, so addire man die beiden äußern, und ziehe das innere ab, so erhält man das fehlende innere.

2) des dritten zu 2 gegebenen; wenn nemlich in einer arithmetischen Proportion das erste, zweite und dritte Glied gegeben, das 2te und 3te aber gleich sind, folglich die Proportion stetig ist, so heißt das 4te Glied die arithmetische Proportionale zu zweien.

$a - (a \pm d) = (a \pm d) - ?$

$a - (a \pm d) = (a \pm d) - x$ $\qquad 8 - 15 = 15 - x$

$a + x = (a \pm d) + (a \pm d) = 2a \pm 2d$ $\qquad 8 + x = 15 + 15 = 30$

$x = 2a \pm 2d - a = a \pm 2d$ $\qquad x = 30 - 8 = 22.$

d. h. man nehme eines der mittlern Glieder doppelt, und ziehe das gegebene äußere ab, so ist der Rest das fehlende.

3) des mittlern arithmetischen Proportions-Gliedes zu 2 gegebenen.

In $a - (a \pm d) = (a \pm d) - (a \pm 2d)$ seien die beiden mittlern (unter sich gleichen) Glieder unbekannt, und zu suchen, so nennt man diese Aufgabe: die mittlere arithmetische Proportionale zu 2 gegebenen

zu finden. Man erhält hiebei stets eine stetige Proportion. Setzet man also

$a - x = x - (a \pm 2d)$ $\qquad$ $7 - x = x - 15$

so ist $2x = a + (a \pm 2d) = 2a \pm 2d$ $\qquad$ $2x = 7 + 15$

$x = \frac{2a \pm 2d}{2} = a \pm d$ $\qquad$ $x = 11.$

Um daher das arithmetische Mittel zwischen 2 gegebenen Größen zu finden, addire man beide, und nehme von dieser Summe die Hälfte. Das arithmetische Mittel nennt man auch jene Größe, welche man erhält, wenn mehrere gegebene Größen addirt werden, und man ihre Summe durch die Anzahl der addirten dividirt; so ist das arithmetische Mittel zu 6, 8, 12, 16, 24, 36 $= \frac{6 + 8 + 12 + 16 + 24 + 36}{6}$

$= \frac{102}{6} = 17.$

72.

Da das Hauptgesetz der arithmetischen Proportionen Gleichheit der Summen der äußern und mittlern Glieder ist, so sind auch alle Veränderungen an selben erlaubt, so lange diese Gleichheit ungestört bleibt; so kann man aus der Proportion

$a - b = c - d$, oder $6 - 9 = 8 - 11$ durch Versetzung folgende ebenfalls noch giltigen Proportionen bilden

$a - c = b - d$,	oder	$6 - 8 = 9 - 11$
$b - a = d - c$	»	$9 - 6 = 11 - 8$
$b - d = a - c$	»	$9 - 11 = 6 - 8$
$c - a = d - b$	»	$8 - 6 = 11 - 9$
$c - d = a - b$	»	$8 - 11 = 6 - 9$
$d - b = c - a$	»	$11 - 9 = 8 - 6$
$d - c = b - a$	»	$11 - 8 = 9 - 6.$

Auch kann man zu den Vorder- oder Hintergliedern, oder zu einem der beiden Verhältnisse, so wie zu allen Gliedern der Proportion eine Größe addiren, oder subtrahiren, und die neue Proportion ist wieder richtig.

$a - b = c - d$	$3 - 5 = 7 - 9.$
$(a \pm m) - (b \pm m) = c - d$	$(3 \pm 2) - (5 \pm 2) = 7 - 9.$
$a - b = (c \pm m) - (d \pm m)$	$3 - 5 = (7 \pm 2) - (9 \pm 2).$
$(a \pm m) - b = (c \pm m) - d$	$(3 \pm 2) - 5 = (7 \pm 2) - 9.$
$a - (b \pm m) = c - (d \pm m)$	$3 - (5 \pm 2) = 7 - (9 \pm 2).$

$(a \pm m) - (b \pm m) = (c \pm m) - (d \pm m)$ $(3 \pm 2) - (5 \pm 2) = (7 \pm 2) - (9 \pm 2)$.
$(a \pm m) - (b \pm m) = (c \pm p) - (d \pm p)$ $(3 \pm 2) - (5 \pm 2) = (7 \pm 4) - (9 \pm 4)$.

Eben so lassen sich aus Verbindung zweier, oder mehrerer arithmetischer Proportionen durch Addition, oder Subtraction neue richtige Proportionen bilden:

$a - b = c - d$	$3 - 5 = 7 - 9$
$e - f = g - h$	$4 - 8 = 10 - 14$
$(a \pm e) - (b \pm f) = (c \pm g) - (d \pm h)$	$(3 \pm 4) - (5 \pm 8) = (7 \pm 10) - (9 \pm 14)$.

Von den geometrischen Proportionen.

73.

Der allgemeine Ausdruck derselben ist wieder:

$a : aq = b : bq$ im Allgemeinen

und $a : aq : aq^2$ für stetige.

Bildet man hiebei die Produkte der äußern und innern Glieder, so erhält man $a \times bq = b \times aq$

und $a^2q^2 = a^2q^2$.

d. h. in jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der innern Glieder gleich dem Produkte der äußern.

Für $a : b = c : d$ erhält man demnach $bc = ad$, oder $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Es kann demnach jeder Ausdruck von einer der beiden Formen in eine geometrische Proportion umgewandelt werden, z. B. $4 \times 9 = 3 \times 12$

$4 : 3 = 12 : 9$, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, $3 : 2 = 12 : 8$.

Auch bei geometrischen Proportionen sind wieder die 3 Aufgaben, wie §. 71, möglich, deren Auflösung nach der bereits gefundenen allgemeinen Eigenschaft geometrischer Proportionen nicht mehr schwierig ist.

1. Zu 3 gegebenen Gliedern das 4te zu suchen? z. B. in der Proportion $a : aq = b$ fehle das letzte, welches wir x nennen wollen, so ist $a : aq = b : x$.

und $ax = b \cdot aq$

$$x = \frac{b \cdot aq}{a} = bq.$$

Soll daher zu 3 gegebenen Gliedern das vierte (das nun wieder jede Stelle einnehmen kann) gefunden werden, so ist dasselbe durch

den Quotient gegeben, den man erhält, wenn man die gegebenen innern, oder äußern Glieder multiplicirt, und dieß Produkt durch das einzelne äußere, oder innere dividirt, z. B.

$4 : x = 9 : 27$ $\quad x : 13 = 4 : 26$

$9x = 108$ $\quad 26x = 52$

$x = 12$ $\quad x = 2.$

2. Sind aber die beiden äußern, oder mittlern Glieder unbekannt, vorausgesetzt gleich, und zu suchen, so heißt man dieß: die mittlere geometrische Proportionale zwischen den gegebenen finden; sind z. B. die gegebenen Zahlen 4 und 9, so heißt die Proportion

$4 : x = x : 9$ allgemein $a : x = x : b$

$x^2 = 36$ $\quad x^2 = ab$

$x = \sqrt{36} = \pm 6$ $\quad x = \pm\sqrt{ab}.$

Es ist demnach die mittlere geometrische Proportionale stets der Quadratwurzel aus dem Produkte der gegebenen Zahlen gleich.

3. Soll dagegen zu 2 gegebenen die dritte Proportionale gefunden werden, so bildet diese dritte das vierte Glied einer stetigen Proportion, deren 1stes die erste der gegebenen, das 2te und 3te Glied die zweite der gegebenen ist, woraus sich x leicht bestimmen läßt; sind z. B. 2 und 6 die gegebenen Zahlen, so erhält man die Proportion

$2 : 6 = 6 : x$, woraus $2x = 36$, und $x = 18$.

Bei 2 und 3 sind die Proportionen ebenfalls wieder stetige.

74.

Auch für geometrische Proportionen gelten wieder alle Veränderungen und Verbindungen mit andern, wodurch die Gleichheit der Produkte der innern und äußern Glieder nicht gestört wird.

Der häufige Gebrauch der abgeleiteten, und zusammengesetzten Proportionen sowohl in der Arithmetik, als Geometrie, macht eine gedrängte Uebersicht der vorzüglichsten Veränderungen nothwendig.

1. Jede geometrische Proportion kann 8 verschiedene Stellungen annehmen.

$a : b = c : d$ $\quad 3 : 4 = 6 : 8$

$a : c = b : d$ $\quad 3 : 6 = 4 : 8$

$b : a = d : c$ $\quad 4 : 3 = 8 : 6$

$b : d = a : c$ $\quad 4 : 8 = 3 : 6$

e : a = d : b	6 : 3 = 8 : 4
c : d = a : b	6 : 8 = 3 : 4
d : b = c : a	8 : 4 = 6 : 3
d : c = b : a	8 : 6 = 4 : 3.

2. Wenn a : b = c : d, so ist auch

ma : mb = c : d	3 . 3 : 4 . 3 = 6 : 8
ma : b = mc : d	3 . 3 : 4 = 6 . 3 : 8
$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$	$\frac{3}{2} : \frac{4}{2} = 6 : 8$
$\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$	$\frac{3}{2} : 4 = \frac{6}{2} : 8.$

Man kann daher in jeder Proportion ein äußeres und ein inneres Glied mit einer und derselben Zahl multipliciren, oder dividiren.

Mit Hilfe dieses Satzes können die in einer Proportion vorkommenden Brüche, so wie gleiche Faktoren innerer und äußerer Glieder entfernt, und hiedurch Proportionen vereinfacht werden.

$8 : 13\frac{1}{3} = 3 : 5 = 8 : \frac{40}{3} = 3 : 5 = 24 : 40 = 3 : 5,$

oder 8 : 40 = 3 : 15.

320 : 256 = 48 : x = 5 : 4 = 48 : x,

3. Aus a : b = c : d folgt

a : (b ± a) = c : (d ± c)	3 : (4 ± 3) = 6 : (8 ± 6)
b : (b ± a) = d : (d ± c)	4 : (4 ± 3) = 8 : (8 ± 6)
a : (c ± a) = b : (d ± b)	3 : (6 ± 3) = 4 : (8 ± 4)
c : (c ± a) = d : (d ± b)	6 : (6 ± 3) = 8 : (8 ± 4).

Es verhält sich also das erste oder zweite Glied zur Summe, oder Differenz dieser beiden, wie das 3te oder 4te zur Summe oder Differenz. Dasselbe gilt vom 1sten oder 3ten, und 2ten oder 4ten.

Dadurch ist man im Stande, in einer Proportion, worin ein äußeres und ein mittleres Glied unbekannt, ihre Summe, oder Differenz aber bekannt ist, jede der unbekannten zu finden, z. B.

6 : x = 9 : y	6 : (6 + 9) = x : (x + y) = x : 25.
x + y = 25	6 : (9 — 6) = x : (y — x) = x : 5.
oder y — x = 5	aus beiden x = 10.

3. Da nach 2.

a : c = (b + a) : (d + c)	3 : 6 = (4 + 3) : (8 + 6).
u. a : c = (b — a) : (d — c)	3 : 6 = (4 — 3) : (8 — 6)
so ist (b+a):(b—a)=(d+c):(d—c).	(4+3):(4—3)=(8+6):(8—6).

so wie

$(c+a):(c-a)=(d+b):(d-b)$. $(6+3):(6-3)=(8+4):(8-4)$.

Es stehen demnach Summen und Differenzen der beiden ersten und letzten, so wie der Vorder- und Hinterglieder im Verhältniß. Zugleich folgt, daß, wenn in zwei Proportionen gleiche Verhältnisse vorkommen, die beiden andern Verhältnisse wieder eine richtige Proportion bilden.

4. Haben zwei oder mehrere Proportionen gleiche Exponenten, so sind auch Summen und Differenzen der homologen Glieder proportional.

$a : b = c : d$	$3 : 4 = 6 : 8$
$p : q = m : n$	$9 : 12 = 15 : 20$
$(a \pm p) : (b \pm q) = (c \pm m) : (d \pm n)$.	$(3 \pm 9) : (4 \pm 12) = (6 \pm 15) : (8 \pm 20)$.

5. Aus $a : b = c : d$ $3 : 4 = 6 : 8$

und $p : q = m : n$ $5 : 8 = 10 : 16$

ist $ap : bq = cm : dn$. $15 : 32 = 60 : 128$.

und da $p : q = m : n$ mit $q : p = n : m$, und $5 : 8 = 10 : 16$ mit $8 : 5 = 16 : 10$ einerlei ist, so ist auch

$aq : bp = cn : dm$, $24 : 20 = 96 : 80$.

Jede aus Multiplication zweier oder mehrerer Proportionen entstandene Proportion ist richtig.

6. Wenn $a : b = m : n$ $3 : 4 = 9 : 12$

und $b : c = o : p$ $4 : 6 = 8 : 12$

so ist $a : c = mo : np$ $3 : 6 = 72 : 144$.

oder

$a : b = m : n$	$3 : 4 = 9 : 12$
$b : c = o : p$	$4 : 6 = 8 : 12$
$c : d = q : r$	$6 : 8 = 15 : 20$
$a : d = moq : npr$	$3 : 8 = 1080 : 2880$.

Man sagt in diesen Fällen, das Verhältniß $a : c$ ist ein aus den beiden $m : n$ und $o : p$, so wie das Verhältniß $a : d$ ein aus den dreien $m : n$, $o : p$ und $q : r$ zusammengesetztes.

Wenn m Proportionen mit einander so verbunden werden, daß je zwei auf einander folgende ein Glied gemein haben, so lassen sich $(m - 1)$ Größen eliminiren.

7. Sind hiebei die Proportionen gleich, z. B.

$a : b = c : d$	$2 : 3 = 4 : 6$
$a : b = c : d$	$2 : 3 = 4 : 6$

$a : b = c : d$	$2 : 3 = 4 : 6$
so ist $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$	$2^3 : 3^3 = 4^3 : 6^3$.

allgemein $a^m : b^m = c^m : d^m$ $2^m : 3^m = 4^m : 6^m$,

welcher Ausdruck richtig ist, es mag m eine ganze, oder gebrochene, positive, oder negative Zahl sein: d. h. alle Potenzen und Wurzeln einer Proportion bilden wieder eine richtige Proportion, oder wenn $a : b = c : d$, so ist auch

$$\sqrt[m]{a^n} : \sqrt[m]{b^n} = \sqrt[m]{c^n} : \sqrt[m]{d^n}.$$

Diese Umformung der Proportionen dient zur Entfernung der allenfalls vorkommenden irrationalen Glieder, z. B.

$a : b = c : \sqrt{d} = a^2 : b^2 = c^2 : d$, $a : \sqrt[3]{b} = c^2 : \sqrt{d} = a^6 : b^2 = c^{12} : d^3$.

8. Multiplicirt man die stetige Proportion

$a : b = b : c.$	$3 : 6 = 6 : 12$
mit $a : b = a : b.$	$3 : 6 = 3 : 6.$
so ist $a^2 : b^2 = ab : bc = a : c.$	$3^2 : 6^2 = 3 : 12.$

Stehen demnach drei Größen in stetiger Proportion, so verhalten sich die Quadrate der beiden ersten, wie die erste zur dritten.

Auf ähnliche Art läßt sich darthun, daß von vier stetigen Proportionen sich die 3te Potenzen der beiden ersten verhalten, wie die 1ste zur 4ten, d. ist, wenn $a : b = b : c = c : d$, so ist auch $a^3 : b^3 = a : d$.

9. Aus $a : b = c : d$	$3 : 4 = 6 : 8.$
und $m : n = p : q.$	$2 : 3 = 10 : 15$
folgt $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p} : \frac{d}{q}$	$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{6}{10} : \frac{8}{15}$
und $\frac{a}{n} : \frac{b}{m} = \frac{c}{q} : \frac{d}{p}$	$\frac{3}{3} : \frac{4}{2} = \frac{6}{15} : \frac{8}{10}.$

Proportionen durch Division homologer Glieder entstanden, sind ebenfalls richtig.

10. Aus $a : b = c : d$	$3 : 4 = 6 : 8$
und $m : n = c : d$	$9 : 12 = 6 : 8$
folgt $a : b = m : n.$	$3 : 4 = 9 : 12$
und $(a + m) : (b + n) = c : d.$	$(3 + 9) : (4 + 12) = 6 : 8.$

11. Aus $a : b = c : d$	$3 : 4 = 6 : 8,$
und $a : m = c : n$	$3 : 9 = 6 : 18$
$b : m = d : n.$	$4 : 9 = 8 : 18.$
$a : (b \pm m) = c : (d \pm n).$	$3 : (4 \pm 9) = 6 : (8 \pm 18).$

12. Aus $a : b = mc : nd$ $\quad 2 : 3 = 4 . 8 : 3 . 16$

und $\dfrac{m : n = p : q}{a : b = cp : dq}$ $\quad \dfrac{4 : 3 = 12 : 9}{2 : 3 = 96 : 144.}$

13. Ist gegeben $a : b = c : d = e : f = g : h$ u. s. w., so ist auch

$(a + c + e + g + \ldots) : (b + d + f + h + \ldots) = a : b.$
$c : d.$
$e : f.$
u. s. w.

$1 : 2 = 4 : 8 = 16 : 32 = 18 : 36 = \ldots\ldots$

$(1 + 4 + 16 + 18 + \ldots) : (2 + 8 + 32 + 36 + \ldots) = 1 : 2.$
$= 4 : 8.$
$= 16 : 32.$
$= 18 : 36.$

Sind nemlich mehrere gleiche Verhältnisse gegeben, so verhält sich die Summe mehrerer oder aller Vorderglieder, zur Summe mehrerer oder aller Hinterglieder, wie in irgend einem der gegebenen Verhältnisse das Vorderglied zum Hinterglied.

Hieher gehört also die Aufgabe, eine gegebene Zahl m in mehrere Theile zu theilen, die sich zu einander verhalten, wie $a : b : c \ldots$

Heißen die Theile x, y und z, so ist

$a : b = x : y$, oder $a : x = b : y$

$b : c = y : z$ $\quad b : y = c : z,$

welches so viel ist, als $a : x = b : y = c : z$; woraus

$(a + b + c) : (x + y + z)$, oder $m = a : x.$
$= b : y.$
$= c : z.$

z. B. 162 in drei Theile zu theilen, die sich verhalten, wie 2, 3, 4.

$(2 + 3 + 4) : 162 = 2 : x$, und $x = 36.$

$(2 + 3 + 4) : 162 = 3 : y \quad y = 54.$

$(2 + 3 + 4) : 162 = 4 : z \quad z = 72.$

$36 : 54 : 72 = 2 : 3 : 4$

und $\quad 36 + 54 + 72 = 162.$

Jede dieser abgeleiteten und zusammengesetzten Proportionen kann nun wieder die in Nr. 1. angegebenen Stellungen annehmen. Auch lassen sich aus, und außer den bereits entwickelten Proportionen noch mehrere andere, die wir jedoch übergehen können, aufstellen.

Von der Berechnung der Exponenten oder Logarithmen.

75.

Unter Logarithmus versteht man denjenigen Exponent, den man einer Zahl geben muß, um eine andere zu erhalten. So entsprechen z. B. der Reihe

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ .... die Zahlen
1, 2, 4, 8, 16 .... wobei also
0, 1, 2, 3, 4 .... die Logarithmen von
1, 2, 4, 8, 16 .... heißen, welches man bezeichnet: $1 = \log. 2$, $3 = \log. 8$ *ꝛc.*

Wird nun nach und nach eine und dieselbe Zahl (Wurzel) zu solchen Potenzen erhoben, daß die daraus entstehenden Zahlen die natürliche Zahlenreihe bilden, so heißen die Exponenten die Logarithmen der Zahlen, oder ein logarithmisches System, und die Wurzel die Basis, oder Grundzahl dieses Systems.

Es folgt daraus, daß man, außer den ganzen Exponenten, auch noch zu gebrochenen Zuflucht nehmen müsse.

Wesentlicher Unterschied zwischen Exponenten und Logarithmen findet demnach nicht statt, nur gebraucht man das Wort Exponent von Potenzen überhaupt, während Logarithmen nur solche Exponenten sind, die alle aus einer Wurzel (Basis) hervorgegangen sind.

Da aber auch jede Zahl (a) als Exponent des geometrischen Verhältnisses $a : 1$, mithin auch a^m als solcher für das Verhältniß $a^m : 1$ betrachtet werden kann, so heißt man auch diese Exponenten einer und derselben Wurzel, oder der Grundzahl a, Verhältnißzahlen (*λογῶν ἀριθμοὶ*), und das Verhältniß $a : 1$ das Grundverhältniß. — Daher der Name Logarithmen.

Ist nun allgemein a die Grundzahl eines logarithmischen Systems, so kann $a^x = b$, worin also $x = \log. b$, als allgemeine Formel für alle möglichen Zahlen gelten, wo also bei der Unveränderlichkeit von a als Grundzahl, x und b einander bestimmen; da aber mit der Zunahme von b nothwendig ein Wachsen von x, und umgekehrt verbunden ist, so folgt, daß in jedem logarithmischen System größern Zahlen größere Logarithmen zukommen.

Wird $x = 0$, so ist $b = 1$, a mag so groß oder klein sein, als

es nur immer will. Es ist daher in jedem logarithmischen System $0 = \log. 1$.

Aus der Gleichung $a^x = b$ folgt ferner: daß die Basis jede positive (ganze oder gebrochene) Zahl, nur nicht eins sein kann, da die Einheit in jeder Potenz wieder eins ist. Wäre aber $a < 1$, so würden die Logarithmen aller Zahlen, die > 1 sind, negativ, und in der Anwendung den übrigen, auf eine Basis > 1 berechneten, an Bequemlichkeit weit nachstehen.

Positiv muß die Basis sein, weil sich durch Potenzen einer negativen Zahl die Reihe der natürlichen Zahlen nicht darstellen läßt, indem durch das successive Potenziren bald positive bald negative Resultate zum Vorschein kommen.

Eben so kann in obiger Gleichung b nie $= 0$, oder negativ werden, da selbe nur positive Werthe hervorbringen kann, x mag jede beliebige Zahl sein, daher für 0, so wie jede negative Zahl bei einer positiven Basis keine Logarithmen möglich sind.

Wohl aber sind negative Logarithmen möglich, ja sogar nothwendig, denn in der Gleichung $a^x = b$ kann b nur dann einen ächten Bruch bedeuten, wenn x negativ ist, und je kleiner dann b wird, desto größer muß $(-x)$ werden. Die Logarithmen aller Brüche sind daher negativ. — Wird aber $(-x)$ unendlich groß, so muß a^{-x} unendlich klein $= 0$, d. h. kleiner, als jede angebbare Zahl, werden, weßwegen der Logarithmus von $0 = -\infty$ (nicht mehr reell).

76.

Die allgemeinen Eigenschaften der Logarithmen gehen aus den Rechnungen mit Potenzen von einerlei Wurzel hervor.

Es sei für die Basis a eines logarithmischen Systems

$a^x = c$, und $a^y = d$, also $x = \log. c$ und $y = \log. d$, so ist

$a^x \times a^y = a^{x+y} = cd$, folglich $x + y = \log. (cd)$,

und durch Subst. für x und y, $\log. c + \log. d = \log. (cd)$.

Deßgleichen $\log. (mnp) = \log. m + \log. n + \log. p.$

d. h. der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.

Es können daher durch die Logarithmen der Primzahlen die aller zusammengesetzten gefunden werden.

Aus $a^x = c$ und $a^y = d$ folgt weiter, daß

$$\begin{array}{l} a^x = c \\ : \; a^y = d \\ \hline a^{x-y} = \frac{c}{d}, \end{array}$$ also $x - y = \log\left(\frac{c}{d}\right)$ und log. c $-$ log. d $=$ log. $\left(\frac{c}{d}\right)$ sei.

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem Logarithmus des Dividends weniger dem des Divisors.

Da aber $\left(\frac{c}{d}\right)$ auch jeden Bruch darstellt, so ergibt sich, daß der Logarithmus eines Bruches gefunden wird, wenn man vom Logarithmus des Zählers den des Nenners abzieht. So lange daher $c < d$, so ist der Logarithmus negativ, für $c = d$ $\left(\frac{c}{d} = 1\right)$, wird er 0, und für $c > d$, d. h. für jeden unächten Bruch positiv.

Wird $a^x = c$ zur nten Potenz erhoben, n mag eine ganze, oder gebrochene, positive oder negative, Zahl sein, so erhält man

$(a^x)^n = (c)^n$

$a^{nx} = c^n$, also log. $(c^n) = nx = n$ log. c

d. h. der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkte aus dem Logarithmus der Wurzel in den Exponent der Potenz.

Für $n = \frac{1}{m}$ wird $a^{nx} = c^n$, $a^{\frac{x}{m}} = c^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{c}$, also log. $\sqrt[m]{c} = \frac{x}{m} = \frac{\text{log. c}}{m}$.

Nemlich der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten, den man durch die Division des Wurzelexponenten in den Logarithmus der gegebenen Zahl erhält.

77.

Anwendung dieser Lehrsätze auf Bestimmung der Logarithmen von Produkten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln auf algebraische Ausdrücke:

log. (abcd) $=$ log. a $+$ log. b $+$ log. c $+$ log. d.

log. $\left(\frac{mn}{pq}\right) =$ log. m $+$ log. n $-$ (log p $+$ log. q).

log. $(a^m b^n c^p) = m$ log. a $+$ n log. b $+$ p log. c.

log. $\left(\frac{a^m b^{-n}}{c^p d^q}\right) = m$ log. a $-$ n log. b $-$ p log. c $-$ q log. d.

$$\log. a^{\frac{m}{n}} b^{-\frac{p}{q}} c = \frac{m}{n} \log. a - \frac{p}{q} \log. b + \log. c.$$

$$\log. \sqrt[n]{a^m b^{-n} c^q} = \frac{m}{n} \log. a - \log. b + \frac{p}{nq} \log. c.$$

$$\log. \left(\frac{a \sqrt[n]{c^m}}{b \sqrt{d}} \right) = \log. a + \frac{m}{n} \log. c - \log. b - \tfrac{1}{2} \log. d.$$

$$\log. \frac{(a+b)^n c^m}{(c+d) \sqrt[4]{d^3}} = n \log. (a+b) + m \log. c - \log. (c+d) - \tfrac{3}{4} \log. d. *)$$

$$\log. \frac{1}{(a+b^n)^m} = -m \log. (a+b^n).$$

$$\log. \frac{1}{\sqrt[n]{(a+b)}} = -\frac{1}{n} \log. (a+b).$$

$$\log. (a^x) = x \log. a.$$

$$\log. (a^{x^m}) = x^m \log. a.$$

Zugleich können die logarithmischen Ausdrücke wieder als Beispiele der Verwandlung in algebraische dienen.

Kommen daher mehrere Glieder in einem Ausdrucke, z. B. $5x^6 - 6x^5 + 24x^4$ durch Logarithmen zu berechnen, vor, so berechne man jedes Glied einzeln, und setze dann die Resultate, in Zahlen ausgedrückt, auf die verlangte Weise zu einander.

Daß man bei solchen Beispielen, welche auf große Zahlen führen, durch Anwendung der Logarithmen keine vollständig genaue Resultate erhalten kann, geht nothwendig daraus hervor, weil man nur Zahlen mit 6—7 Ziffer mit Logarithmen von 6 Decimalen mit Sicherheit bestimmen kann. Doch ist ihr Gebrauch, besonders im Falle einer bloßen Annäherung, äußerst vortheilhaft und höchst einfach.

---

*) Wenn in der Rechnung mit Logarithmen Additionen und Subtractionen vorkommen, so gibt es kein Mittel, diese durch Logarithmen zu vollziehen, indem man nicht von log. a und log. b auf log. $(a \pm b)$ schließen kann. Man muß daher die Addition oder Subtraction von a und b auf die gewöhnliche Art verrichten, und dann den Logarithmus der Summe oder Differenz suchen.

Vom briggischen, oder gemeinen logarithmischen Systeme.

78.

Obwohl nach §. 75 unendlich viele logarithmische Systeme möglich sind, so werden doch beim praktischen Rechnen die (von ihrem Erfinder Henri Briggs, Professor zu Oxford) sogenannten gemeinen oder briggischen Logarithmen am häufigsten gebraucht, welche, da sie auf die Basis unseres Zahlensystems berechnet sind, und daher demselben ähnlich fortlaufen, in der Elementarmathematik entschiedenen Vorzug haben.

Anmerkung. Brigg's Werk erschien zu London 1624 unter dem Titel: **Arithmetica Logarithmica** — und enthält die Logarithmen der Zahlen von 1 — 20,000, und von 90,000 — 100,000 mit 14 Decimalstellen.

Die Lücke von 20,000 — 90,000 füllte Adrian Vlacq, ein holländischer Buchhändler und Mathematiker, aus, in seiner **Arithmetica Briggii** 1628.

Der Erste jedoch, welcher ein logarithmisches System herausgab, war Johann Neper, Baron von Merchiston:

Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio etc. Autore et Inventore Joanne Nepero. Edinburgi 1614. 4to.

Einige Jahre nachher machte Justus Byrg, ein Schweizer, ein Logarithmensystem bekannt: Arithmetische und Geometrische Progreß Tabulen ꝛc. Gedruckt in der alten Stadt Prag, im Jahre 1620, in 4to.

Diese beiden Systeme sind jedoch auf andere Grundzahlen berechnet.

Unter den neuern größeren Sammlungen verdienen besonders die von Vega, Callet, und Schulze angeführt zu werden.

Es sind demnach diese Logarithmen nichts anders, als jene Exponenten, zu denen man die Zahl 10 erheben muß, um die natürliche Reihe der Zahlen zu erhalten.

Hat man die Reihe

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}, \text{ so ist } -n = \log. \left(\frac{1}{10^n}\right).$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100} \quad » \quad -2 = \log. \frac{1}{100}.$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} \quad » \quad -1 = \log. \frac{1}{10}.$$

$10^0 = 1$, so ist $0 = \log. 1.$
$10^1 = 10$ » $1 = \log. 10.$
$10^2 = 100$ » $2 = \log. 100.$
$10^3 = 1000$ » $3 = \log. 1000.$
$10^4 = 10000$ » $4 = \log. 10000.$
$10^5 = 100000$ » $5 = \log. 100000.$

Es ist also auch hier wieder log. $1 = 0$, und log. 10, d. h. der Logarithmus der Basis $= 1$, so wie -1 der Logarithmus desjenigen Bruches, dessen Zähler 1, und dessen Nenner die Basis, d. i. $\frac{1}{10}$ ist.

Auch können nur die Logarithmen derjenigen Zahlen, die Potenzen der Basis sind, ganze, und zwar positive Zahlen sein, so wie negative (ganze) Logarithmen allen Brüchen zugehören, die unter der Form $\frac{1}{10^n}$ möglich sind, wo n eine ganze Zahl bedeutet.

Da log. $1 = 0$, log. $10 = 1$, log. $100 = 2$ ꝛc. ist, so fallen die Logarithmen der Zahlen zwischen $1 - 10$, zwischen 0 und 1, und die für die Zahlen zwischen 10 und 100 müssen > 1 und < 2 sein; überhaupt die Logarithmen der ganzen Zahlen, die mit m Ziffer bezeichnet sind, sind größer als $m - 1$, und kleiner als m, folglich gleich einer ganzen Zahl $(m - 1)$, die man Charakteristik oder Kennziffer heißt, und die also immer um 1 kleiner, als die Anzahl der Ziffer ist, und einem Bruche, den man der Bequemlichkeit der Rechnung wegen als Decimalbruch ausdrückt, und Mantisse (Zusatz) genannt wird. Man kennt daher für jede gegebene Zahl die Charakteristik ihres Logarithmus, so wie aus jedem Logarithmus die Anzahl der Ziffer der ganzen Zahl, die dem gegebenen Logarithmus entspricht; so ist, wenn x den jedesmaligen Decimalbruch oder die Mantisse bedeutet

log. $23456 = 4 + x$, und $3{,}259116 = \log. 1816.$
log. $2345{,}6 = 3 + x$ » $2{,}259116 = \log. 181{,}6.$
log. $234{,}56 = 2 + x$ » $1{,}259116 = \log. 18{,}16.$
log. $23{,}456 = 1 + x$ » $0{,}259116 = \log. 1{,}816.$
log. $2{,}3456 = 0 + x$ » $0{,}259116 - 1 = \log. 0{,}1816$ ꝛc.
log. $0{,}23456 = x - 1$ (also negativ).

Da aber, wenn der Logarithmus einer ganzen Zahl keine ganze ist, derselbe auch nicht genau durch einen Bruch darstellbar ist, indem die Gleichung $10^{\frac{m}{n}} = c$ unmöglich ist, wenn m und n Primzahlen

sind, und c eine ganze Zahl bedeutet, so wird der dem Logarithmus entsprechende Decimalbruch nach dem Grade der erfoderlichen Genauigkeit auf 5 — 7 Stellen angenommen.

Ist der Logarithmus einer Zahl eine ganze Zahl, so setzt man, wegen der Gleichartigkeit mit den übrigen, so wie zur Vermeidung leicht zu begehender Fehler, derselben ebenfalls so viel leere Decimalstellen bei, als die übrigen Logarithmen haben, deren man sich bedient. So würde man bei Logarithmen mit 6 Decimalstellen für log. 10000 = 4,000000 setzen, was = 4 ist.

Auch geht aus obiger Reihe hervor, daß die Unterschiede zweier oder mehrerer auf einander folgender Logarithmen immer kleiner werden, je größer die Zahlen sind, denn der Logarithmus von 1, und log. 10, so wie log. 10, und log. 100, ist eben so um 1 unterschieden, als der log. 100, und log. 1000, da doch zwischen 100 und 1000 viel mehr Zahlen liegen, als zwischen 1 und 10.

79.

Die Art und Weise, wie die Logarithmen für die irrationalen Potenzen von 10 gefunden werden, könnte hier, da es zum Verständniß des Gebrauches der Logarithmen nicht nöthig ist, und die bequemern Methoden nur die höhere Mathematik lehrt, übergangen werden; um jedoch das Mühsame dieser Arbeit auf elementarem Wege, den, mit einiger Abweichung, die Erfinder aus Unkenntniß eines andern einschlugen, zu zeigen, folgt hier die Berechnung des Logarithmus der Primzahl 5.

Ist nemlich C die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen A und B, so ist der Log. von C die mittlere arithmetische zwischen den Logarithmen von A und B, denn für

$$A : C = C : B \text{ ist } C = \sqrt{AB}, \text{ und}$$

$$\log. C = \frac{1}{2} (\log. A + \log. B).$$

Soll daher der Logarithmus einer Zahl, die keine Potenz der Grundzahl ist, gefunden werden, so nehme man die 2 Potenzen der Basis, zwischen welche die gegebene Zahl fällt, so muß auch der Logarithmus der letztern zwischen die Exponenten der Potenzen fallen.

Sucht man nun zwischen diesen beiden Potenzen der Basis die mittlere geometrische Proportionale, so ist das arithmetische Mittel der Exponenten dieser beiden Potenzen der entsprechende Logarithmus. Durch fortgesetztes Aufsuchen der mittlern geometrischen Proportio-

nale zwischen 2 solchen nächstgelegenen bekannten Potenzen von 10, kommt man zuletzt auf eine Zahl, die von derjenigen unbedeutend abweicht, folglich ihr gleich gesetzt werden kann, für die man den Logarithmus sucht, und wenn man eben so jedesmal das arithmetische Mittel, das auf die mittlere geometrische Proportionale fällt, nimmt, auf den Logarithmus der gegebenen Zahl.

Ist der Logarithmus von 5 für die Basis 10 zu berechnen, so sieht man, daß, da $10^0 = 1$, und $10^1 = 10$ ist, 5 aber zwischen 1 und 10 liegt, der Logarithmus von 5 zwischen 0 und 1 falle.

Um nun aber von 1 und 10 allmälig auf 5 zu kommen, suche man die mittlere geometrische Proportionale, $1 : x : 10$, woraus $x = \sqrt{10} = 3{,}162277$. So ist

$$\log. 3{,}162277 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5, \text{ oder } 10^{0,5} = 3{,}162277.$$

Da 5 zwischen 3,162277 und 10 ist, so suche man wieder zwischen diesen beiden die mittlere geometrische Proportionale = 5,623413, so ist

$$\log. 5{,}623413 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = 0{,}75, \text{ u. } 10^{0,75} = 5{,}623413.$$

Folgendes Schema stellt den ganzen Verlauf dieser mühsamen Arbeit dar.

A = . . .	1,000000,	log. A = 0,0000000.
B = . . .	10,000000,	log. B = 1,0000000.
C = $\sqrt{AB}$ =	3,162277,	log. C = 0,5000000.
D = $\sqrt{BC}$ =	5,623413,	log. D = 0,7500000.
E = $\sqrt{CD}$ =	4,216964,	log. E = 0,6250000.
F = $\sqrt{DE}$ =	4,869674,	log. F = 0,6875000.
G = $\sqrt{DF}$ =	5,232991,	log. G = 0,7187500.
H = $\sqrt{FG}$ =	5,048065,	log. H = 0,7031250.
I = $\sqrt{FH}$ =	4,958069,	log. I = 0,6953125.
K = $\sqrt{HI}$ =	5,002865,	log. K = 0,6992187.
L = $\sqrt{IK}$ =	4,980416,	log. L = 0,6972656.
M = $\sqrt{KL}$ =	4,991627,	log. M = 0,6982421.
N = $\sqrt{KM}$ =	4,997242,	log. N = 0,6987304.
O = $\sqrt{KN}$ =	5,000052,	log. O = 0,6989745.
P = $\sqrt{NO}$ =	4,998647,	log. P = 0,6988527.
Q = $\sqrt{OP}$ =	4,999350,	log. Q = 0,6989135.
R = $\sqrt{OQ}$ =	4,999701,	log. R = 0,6989440.

$S = \sqrt{OR} = 4{,}999876$, log. $S = 0{,}6989592$.
$T = \sqrt{OS} = 4{,}999963$, log. $T = 0{,}6989668$.
$V = \sqrt{OT} = 5{,}000008$, log. $V = 0{,}6989707$.
$W = \sqrt{TV} = 4{,}999984$, log. $W = 0{,}6989687$.
$X = \sqrt{VW} = 4{,}999997$, log. $X = 0{,}6989697$.
$Y = \sqrt{VX} = 5{,}000003$, log. $Y = 0{,}6989702$.
$Z = \sqrt{XY} = 5{,}000000$, log. $Z = 0{,}6989700$.

mithin $0{,}6989700 = \log. 5$, oder $10^{0{,}6989700} = 5$.

Da jede Zahl, die nicht Primzahl ist, durch $p \times q \times r \ldots$, oder $p \cdot p \cdot p \ldots = p^n$ darstellbar ist, $\log. p \times q \times r \ldots = \log. p + \log. q + \log. r + \ldots$, und $\log. p^n = n \log. p$, so ergibt sich das Verfahren, vermittelst der Logarithmen der Primzahlen die der übrigen zu bestimmen.

80.

Zum Gebrauche sind nun Tabellen nöthig, in denen die natürliche Zahlenreihe nebst den zugehörigen Logarithmen enthalten sind, und welche dann logarithmische Tafeln heißen. Man hat dergleichen von verschiedener Ausdehnung, nach dem verschiedenen Bedürfnisse. Ueber ihre Einrichtung und den Gebrauch gibt die stets beigefügte Einleitung Aufschluß.

Da es nun der Gleichförmigkeit wegen sehr vortheilhaft ist, daß alle Schüler gleiche Tafeln benützen, so habe ich solche hier beigefügt, welche zu den im gewöhnlichen Rechnen vorkommenden Fällen wohl mehr, als hinreichend sind. Es sind auch dieselben, mit trigonometrischen Tafeln verbunden, besonders erschienen:

Die Logarithmen für die Zahlen, Sinus und Tangenten, nebst den Sinus für den Halbmesser = 1, geordnet von Prof. Dr. Minsinger, Augsburg 1832, bei Karl' Kollmann. 56 Seiten Tafeln, und X Einleitung, die wegen ihrer Vollständigkeit, bequemen Einrichtung, Korrektheit, und äußerst billigen Preises, nicht mit Unrecht empfohlen werden können.

Erläuterung und Gebrauch der Tafel.

Obwohl die Logarithmen der Tafeln bis auf 7 Decimalstellen angegeben sind, so ist doch der vorzügliche Gebrauch derselben auf 6

Decimalen beschränkt, indem hiedurch die Logarithmen aller Zahlen von 6 — 7 Ziffer mit großer Genauigkeit gefunden werden können.

Die Benützung der 7ten Decimalstelle ist, um die Tafel desto vollständiger und nützlicher zu machen, für Zahlen von 7 — 8 Ziffer, daher auch die letzte Decimalstelle durch ein Comma von den ersten 6 getrennt ist.

So oft die 7te Ziffer $>$ 5 ist, könnte man der größern Genauigkeit wegen, bei dem Gebrauche von 6 Decimalen die letzte um eine Einheit vermehren.

A. Für eine gegebene Zahl den entsprechenden Logarithmus mit 6 Decimalen zu finden.

1. Die Logarithmen der Zahlen von 1 — 100 befinden sich auf der 2ten Seite.

2. Von der 3ten Seite angefangen, enthält jede (Seite) 3 Hauptspalten, in der ersten, mit N bezeichneten, befinden sich die natürlichen Zahlen von 100 — 999, und darneben in der oben mit 0 bezeichneten Spalte der dazu gehörige Logarithmus, jedoch ohne Charakteristik, welche allzeit, wenn die gegebene Zahl n Ziffer (als ganze Stellen) enthält, (n — 1) ist.

(Die 2 ersten freistehenden Decimalstellen gelten in der Spalte 0 so lange für die folgenden Zeilen, bis wieder 2 neue folgen, oder bis die übrigen Decimalstellen vorn mit einem Sternchen bezeichnet sind.)

z. B. log. 263.

Auf pag. 9 findet man neben 263 den Logarithmus 419956, und da die Zahl 3 Ziffer hat, folglich die Charakteristik ihres Logarithmus 2 ist, so ist log. 263 = 2,419956.

3. Die 2te Hauptspalte, welche die Aufschriften 0, 1, 2, 3, 4, ... 9 enthält, dient zur Auffindung der Logarithmen der Zahlen von 1000 — 9999, und zwar so, daß man für die 3 ersten Ziffer nur die 2 in der Spalte 0 freistehenden, und für die 4te diejenigen aus den übrigen Spalten nimmt, welche der 4ten Ziffer entsprechen. z. B. für die Zahl 7386 findet man neben 738 in der Spalte bei 0 die ersten 2 Ziffer der Mantisse 86, in der Spalte 6 (welches die 4te Ziffer ist) die vier 8409, und da die Charakteristik des log. 7386 = 3, so ist der vollständige Logarithmus von 7386 = 3, 868409.

Trifft es sich, daß die 4 letzten Decimalen der Mantisse in einer der Spalten 1, 2 . . . 9 kleiner sind, als in der Spalte 0, so muß die 2te Ziffer der Mantisse um eins vermehrt werden, oder

was dasselbe ist, es gelten die nächsten 2 freistehenden. Es hat aber dieß für den Gebrauch durchaus keine Schwierigkeit, da jede solche Mantisse vorn mit einem Sternchen bezeichnet ist.

Log. 3898 wäre den Tafeln zufolge vorläufig 3,580842. Nun ist aber log. 3890 schon 3,589950; es wäre daher in der mit 8 bezeichneten Spalte 10842 zu setzen, wornach man für

log. 3898 erhält 3,58
10842

3,590842.

4. Die 3te Spalte (mit D bezeichnet), enthält die Differenzen der auf einander folgenden Logarithmen, und da auf den ersten Seiten nicht selten mehrere Differenzen in einer horizontalen Linie vorkommen, so ist in der Differenzen-Spalte immer die kleinste der ganzen horizontalen Reihe angegeben, wodurch das Auffinden der Differenz der auf einander folgenden Logarithmen sehr erleichtert ist, indem man nur die letzten Ziffer derselben von einander abziehen darf, um die ganze Differenz zu erfahren. Wo die Differenzen für mehrere Reihen gleich sind, sind sie weggelassen.

5. Vergleicht man die Logarithmen (mit 6 Decimalstellen) von einigen auf einander folgenden Zahlen, die grösser als 1000 sind, mit einander, so findet man, daß ihre Unterschiede beinahe, und wenn die Zahlen schon näher bei 10000 liegen, völlig gleich sind. z. B.

	logarith.	Diff.
log. 1685 =	3,226600	
log. 1686 =	3,226858	. . 0,000258.
log. 1687 =	3,227115	. . 0,000257.
log. 1688 =	3,227372	. . 0,000257.
log. 2891 =	3,461048.	
log. 2892 =	3,461198	. . 0,000150.
log. 2893 =	3,461348	. . 0,000150.
log. 2894 =	3,461498	. . 0,000150.
log. 9890 =	3,995196.	
log. 9891 =	3,995240	. . 0,000044.
log. 9892 =	3,995284	. . 0,000044.
log. 9893 =	3,995328	. . 0,000044.

Es verhalten sich demnach die Differenzen der Zahlen, die > 1000, (beinahe) zu einander, wie die Unterschiede ihrer Logarithmen, d. i. wenn log. 2892 — log. 2891 = 0,000150, auch

log. 2893 — log. 2892 = 0,000150, und log. 2894 — log. 2892 = 2 × 0,000150 = 0,000300 sei, also auch

log. 2891,1 = 3,461048 + $\frac{1}{10}$ 0,000150 = 3,461048 + 0,000015 = 3,461063; log. 2891,3 = 3,461048 + $\frac{3}{10}$.

0,000150 = 3,461093; log. 2891,06 = 3,461048 + $\frac{6}{100}$ × 0,000150 = 3,461048 + 0,000009 = 3,461057. u. s. w.

Hierauf gründet sich die Berechnung der Proportionaltheile, welche in den Tafeln für die auf jeder Seite befindlichen Differenzen der Logarithmen angegeben sind, und deren Gebrauch, zur Auffindung der Logarithmen mehr als 4zifferiger Zahlen, übrigens höchst einfach ist. z. B. man suche log. 2628879.

Die Mantisse des Logarithmus der 4 ersten Ziffer ist nebst Charakteristik für die ganze Zahl 6,419625

die für die folgenden Ziffern noch treffenden Proportionaltheile werden in der Art zur Mantisse des Logarithmus der ersten 4 Ziffer addirt, daß der Theil für die 5te Ziffer ganz, der der 6ten um eine, und der 7ten um 2 Stellen u. s. w. rückwärts unter die Mantisse zu stehen kommt.

Die Differenz der Logarithmen 2628 und 2629 ist 166.

Man erhält demnach	6,419625
der Differenz 166 entsprechender Proportionaltheile der 5ten Ziffer (8) ist	133
der 6ten (7)	116
der 7ten (9)	149
welches addirt	6,41977109

gibt, wovon alle Decimalstellen nach der 6ten wegbleiben, mit dem Bemerken, daß die 6te Decimalstelle um eine Einheit vergrößert wird, wenn die erste der weggelassenen > 5 ist. log. 2628879 ist also 6,419771.

6. Führt die gegebene Zahl am Ende Null bei sich, so schlägt man den Logarithmus für die vorkommenden Ziffer auf, und setzt die treffende Charakteristik vor.

z. B. log. 32760000 = 7,515344, denn 32760000 = 3276 × 10000 also log. 32760000 = log. (3276 × 10000)
= 3,515344 + 4,000000 = 7,515344.

7. Wenn die gegebene Zahl einen Decimalbruch bei sich hat, so sucht man für die Zahl mit Einschluß der Decimalen den Logarithmus, und setzt die Charakteristik vor, welche der ganzen Zahl entspricht, so ist log. 12,3289 = 1,090925, weil log. 12,3289 =

$$\log.\left(\frac{123289}{10000}\right) = \log. 123289 = 5{,}090925$$

$$-\log. 10000 = 4{,}000000$$

$$= 1{,}090925.$$

Hieraus folgt zugleich das Verfahren, den Logarithmus für jede gemischte Zahl zu finden, z. B. $12\frac{17}{25} = \frac{317}{25}$, also

$$\log.\left(\frac{317}{25}\right) = \log. 317 - \log. 25$$

$$= 2{,}501059 - 1{,}397940 = 1{,}103119$$

d. h. man zieht vom Logarithmus des Zählers den des Nenners ab. Oder man verwandelt den Bruch in einen Decimalbruch

$$12\frac{17}{25} = 12{,}68$$

und verfährt wie oben, log. 12,68 = 1,103119.

8. Ist daher die gegebene Zahl ein eigentlicher (Decimal- oder gewöhnlicher) Bruch, so ist, wenn man den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers abzieht, der negative Rest der Logarithmus des Bruches. z. B.

$$\log.\frac{4}{7} = \log. 4 - \log. 7$$

$$= 0{,}602060 - 0{,}845098 = -0{,}243038$$

$$\log. 0{,}0326 = \log.\left(\frac{326}{10000}\right) = \log. 326 - \log. 10000$$

$$= 2{,}513218 - 4{,}000000 = -1{,}486782.$$

9. Diese negativen Logarithmen (scheinbar) zu vermeiden, darf man nur dem kleinern der beiden so viele Einheiten positiv und negativ (also ohne Werthsveränderung) beisetzen, bis die Subtraction des Logarithmus des Nenners möglich ist, so erhält man eine positive Mantisse und negative Charakteristik, welcher Ausdruck mit dem negativen Logarithmus des ganzen Bruches einerlei, in verschiedenen Rechnungs-Fällen aber weit bequemer, ist. z. B.

$$\log. \frac{4}{7} = \log. 4 = 0{,}602060 = 1{,}602060 - 1$$

$$- \log. 7 = \qquad - 0{,}845098$$

$$\text{also } \log. \tfrac{4}{7} = 0{,}756962 - 1$$

$= - 0{,}243038$ (da die Einheit jedesmal größer ist, als jeder ächte Bruch, und $0{,}756962 + 0{,}243038 = 1$.

$$\log. 0{,}0326 = \log. \left(\frac{326}{10000}\right) = 2{,}513218 = 4{,}513218 - 2$$

$$- 4{,}000000$$

$$= 0{,}513218 - 2$$

gleichbedeutend mit $- 1{,}486782$. Bei Decimalbrüchen vereinfacht sich daher das Verfahren dahin, daß man nur dem Logarithmus der als ganze betrachteten Decimalstellen so viele Einheiten negativ beisetzt, als der Nenner des Decimalbruchs 0 hat.

10. Soll aus einem Logarithmus, der negative ganze nach sich führt, irgend eine Wurzel gezogen werden, so muß die dem Logarithmus beigefügte negative Zahl so beschaffen sein, daß mit dem Exponent der Wurzel ohne Rest getheilt werden kann. Ist dieß noch nicht der Fall, so geschieht es durch Hinzufügen der erforderlichen Einheiten vorn und hinten. z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{5}{144}} = \frac{1}{3} \log. \left(\frac{5}{144}\right) = \frac{1}{3} \left(0{,}540608 - 2\right)$$

da nun 3 in 2 nicht enthalten ist, so setze man vor und rückwärts 1 dazu, denn $1{,}540608 - 3$ ist $= 0{,}540608 - 2$.

$$\frac{1{,}540608 - 3}{3} = 0{,}513536 - 1.$$

11. Will man den einer mehr als 4zifferigen Zahl zugehörigen Logarithmus, ohne sich der Proportionaltheile zu bedienen, finden, so bilde man aus den über 4 vorhandenen Ziffern der gegebenen Zahl durch Vorsetzen einer 0 einen Decimalbruch, und multiplicire denselben mit der dem Logarithmus der Zahl entsprechenden Differenz. Läßt man an dem erhaltenen Produkte die Decimalstellen weg, und addirt die ganze Zahl zum Logarithmus der ersten 4 Ziffer, so hat man den Logarithmus der gegebenen Zahl. Auch hier vermehre man die letzte Ziffer, wenn die erste des weggelassenen Bruches > 5 ist, um eine Einheit z. B. log. 2628879 ist für die ersten 4 Ziffer mit der vollständigen Charakteristik 6,419625.

Die Differenz 166 mit 0,879 multiplicirt ist = 145,914 also 146. Daher log. 2628879 = 6,419625 + 146 = 6,419771 wie oben.

B. Das Verfahren, zu einem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl zu finden, ist dem, für eine Zahl den Logarithmus aufzuschlagen, gerade entgegengesetzt.

12. Man lasse daher die Charakteristik unbeachtet, suche in der mit 0 überschriebenen Spalte die 2 ersten Ziffer der Mantisse, und sehe nun in den bis zu den nächsten 2 Ziffern befindlichen Zahlen nach, ob die 4 letzten Ziffer des Logarithmus sich vorfindeu. Sind dabei die letztern Ziffer des gegebenen Logarithmus kleiner, als in der Spalte bei 0, so findet man selbe unter den in der obern Reihe mit * bezeichneten Zahlen, welchen bekanntlich die nächsten 2 vordern Ziffer schon angehören.

In der horizontalen Reihe, wo sich die 4 letzten Ziffer des gegebenen Logarithmus finden, nehme man die in der Spalte N stehende Zahl, an welche die über dem gefundenen Logarithmus in der obern Reihe sich befindliche Ziffer gesetzt wird.

Die Anzahl der ganzen Zifferstellen der gefundenen Zahl bestimmt die Charakteristik, nämlich die Zahl hat (n + 1) ganze Stellen, wenn die Charakteristik n ist. Sind also mehr Ziffer vorhanden, als die Charakteristik fodert, so werden die übrigen durch ein Comma von den ganzen getrennt, und sind Decimalstellen. Deutet die Charakteristik auf mehr Ziffer, so müssen der gefundenen Zahl so viel 0 beigesetzt werden, daß die Zahl eine Ziffer mehr hat, als die Charakteristik Einheiten zählt.

Um für den Logarithmus 3,429429 die Zahl zu finden, suche man in den Zeilen von 42 bis 43 der Logarithmen die Zahl 9429, welche sich in der mit 8 bezeichneten Spalte befindet. Es ist daher die in derselben Linie vorn stehende Zahl 268 mit Beifügung der Ziffer 8, also 2688, die gesuchte, und da die Charakteristik 3 ist, so ist auch die Anzahl der ganzen Zifferstellen vollständig.

Wäre die Charakteristik 2, so entspräche die Zahl 268,8, und wäre selbe 6, so gehörte die Zahl 2688000 dem Logarithmus an.

13. Wenn aber der gegebene Logarithmus nicht genau gefunden wird, wie z. B. 4,541875, so nehme man den nächst kleinern 4,541829, und schreibe die demselben entsprechende 4zifferige Zahl

(3482) ab. Den Unterschied des gegebenen und nächst kleineren Logarithmus (4,541875 — 4,541829 = 46) suche man unter den Proportionaltheilen der Differenz des kleinern Logarithmus. Man findet als nächsten Proportionaltheil 37, welchem die Zahl 3 als nun 5te Ziffer der gesuchten Zahl entspricht. Da aber der erste Rest (46) nicht vollständig unter den Proportionaltheilen gefunden wurde, so bilde man einen 2ten durch Subtraction des gefundenen Proportionaltheils vom ersten Reste (46 — 37 = 9), und füge diesem ein 0 bei, (also 90), welcher Zahl, neuerdings als Proportionaltheil betrachtet, 7 entspricht, mithin die möglichst vollständige Zahl des Logarithmus 4,541875 = 34823,7 wenn nach der gegebenen Charakteristik die ganzen Stellen der Ziffer abgesondert werden. Deutet die Charakteristik wieder auf eine mehrzifferige Zahl, als mit Hilfe der Tabellen aufgesucht werden konnten, so werden die fehlenden Ziffer durch 0 ergänzt, denn das angegebene Verfahren ist nur bis zur 7ten Ziffer sicher, und daher auch nicht weiter rathsam. Noch muß bemerkt werden, daß, wenn die obigen Reste kleiner sind, als der zu 1 gehörige Proportionaltheil, man an die ihnen angehörige Stelle 0 setzen müsse. z. B. 5,683322. Man findet in den Tafeln 683317 wozu 4823 als Zahl gehört, der Rest ist also 0,683322 — 0,683317 = 5 welcher unter den Proportionaltheilen der treffenden Differenz 90 nicht vorkommt, daher die 5te Ziffer 0, und nun suche man 50 in den Proportionaltheilen, so erhält man 5 als die 6te Ziffer, also

5,683322 = log. 482305.

14. Man kann auch wieder für einen in den Tabellen nicht vollständig enthaltenen Logarithmus die Zahl durch Rechnung finden. Nachdem man die 4 ersten Ziffer, wie oben gezeigt wurde, gefunden hat, zieht man den nächst kleinern Logarithmus vom gegebenen ab, und bildet einen Bruch, dessen Zähler der so eben erwähnte Ueberschuß, und dessen Nenner die dem kleinern Logarithmus zugehörige Differenz ist. Verwandelt man diesen Bruch in einen Decimalbruch, und werden die erhaltenen Decimalstellen den 4 ersten Ziffern hinten als ganze Zifferstellen angesetzt, so hat man die gesuchte Zahl, an welcher nur noch die wegen der Charakteristik nöthige Veränderung vorzunehmen ist. Auch muß bemerkt werden, daß man bei der Division der Differenz in den Ueberschuß nicht zu ängstlich verfahre, und einen kleinen Ueberschuß oder Mangel des Dividends nicht beachte, die Division auch nie über die 3te Decimalstelle, also 7te Ziffer der

Zahl fortsetze. Die 4 ersten Ziffer für den Logarithmus 4,541875 sind 3482, welcher Zahl die Mantisse 541829 entspricht.

Nun ist 541875 — 541829 = 46. Die Differenz, welche dem Logarithmus 541829 zugehört 124, also

$\frac{46}{124}$ = 0,37, und weil Charakteristik 4 ist, 4,541875 = log. 34823,7 wie oben.

Die beiden Verfahrungsarten, ohne Hilfe der Proportionaltheile, sind, was Genauigkeit anlangt, den andern vorzuziehen, doch wegen der jedesmal vorzunehmenden Rechnung nicht so bequem.

15. Enthält der gegebene Logarithmus ganze nach sich mit dem Zeichen (—), so findet man die dazu gehörige Zahl, wenn man die dem Logarithmus entsprechende Zahl aufschlägt, derselben so viel 0 vorsetzt, als rückwärts negative Einheiten stehen, und das erste Null durch ein Comma von den andern Ziffern trennt, z. B.

0,574031 — 4
0,574031 = log. 3,75, also
0,574031 — 4 = log. 0,000375.

Die der gegebenen Mantisse vorstehende Kennziffer muß hiebei stets 0 sein, widrigenfalls durch Subtraction der erforderlichen Einheiten vorn und hinten auf 0 gebracht werden, z. B.

2,378608 — 5 = 0,378608 — 3.

16. Ist endlich für einen negativen Logarithmus die Zahl zu suchen, so mache man ihn scheinbar positiv, und verfahre wie oben. Positiv aber wird er, wenn man ihn von einer ganzen Zahl abzieht, die eine Einheit mehr enthält, als der negative, und rückwärts diese Zahl, wovon man abzog, negativ beisetzt, z. B.

— 1,204120
+ 2,000000 — 2
— 1,204120

0,795880 — 2

0,795880 = log. 6,25 also 0,795880 — 2 = log. 0,0625 = $\frac{1}{16}$.

Oder man sucht die dem Logarithmus entsprechende Zahl auf, wie wenn selber positiv wäre, und bildet einen Bruch, dessen Zähler die Einheit, und Nenner die gefundene Zahl ist. z. B.

— 1,204120

1,204120 = log. 16, also — 1,204120 = log. $\frac{1}{16}$ wie oben.

Den Gebrauch der dekadischen Ergänzung übergehe ich, da er ohnedieß keinen erheblichen Vortheil im Rechnen gewährt.

17. Für Fälle, welche mehr Genauigkeit als die bisherigen, erfodern, dienen nun die Logarithmen mit 7 Decimalen. Bei dem Gebrauche derselben bleibt natürlicher Weise das Comma nach der sechsten Stelle weg, auch ist die Differenz jedesmal durch Subtraction des treffenden Logarithmus von dem nächsten zu bestimmen, und hat immer eine Zifferstelle mehr, als die Differenzen der 6zifferigen Logarithmen.

Das übrige Verfahren richtet sich ganz nach Nro. 11 und 14. z. B.

log. 16478659

log. 1647 = ,2166936 und dessen Unterschied vom nächsten 2636, daher 0,8659 × 2636 = 2282,5124 wofür 2283 gesetzt werden kann, also log. 16478659 = 7,2166936 + 2283 = 7,2169219 genau richtig.

Dem Logarithmus 7,1535900 entspricht vorläufig die Zahl 1424, ist aber um 800 größer, und die hieher gehörige Differenz 3049. Man erhält demnach

$\frac{800}{3049}$ = 0,2623 hiemit 7,1535900 = log. 14242623.

Das Nro. 6, 7, 8, 9, 10, 15 und 16 Gesagte gilt auch hier.

Berechnung einiger Zahlenausdrücke mit Hilfe der Logarithmen.

81.

53,726 × 5,9378 = log. 53,726 + log. 5,9378 = 1,730184 + 0,773626 = 2,503810 = 319,01.

9,33504 : 0,00748 = log. 9,33504 — log. 0,00748 = 0,970116 — (0,873902 — 3) = 3,970116 — 0,873902 = 3,096214 = 1248.

$\left(2\frac{5}{6}\right)^9 = \left(\frac{17}{6}\right)^9$ = 9 (log. 17 — log. 6) = 9 . 0,452298 = 4,070682 = 11767,4.

$\sqrt[7]{8} = \frac{\log. 8}{7} = \frac{0,903090}{7}$ = 0,129013 = 1,3459.

Eben so findet man

$\sqrt[5]{\frac{13}{16}}$ = 0,9593; $(317\frac{3}{4})^{0,6}$ = 31,714; $10^{0,5}$ = 1,99526.

$\sqrt[-2]{30,98} = 0,1796$; $\sqrt[4]{0,089764} = 0,54736.$

$$\sqrt[4]{(0,085)^5} = \frac{5 \log. 0,085}{4} = \frac{5}{4}(0,929419-2) = \frac{0,647095-6}{4} =$$

$$\frac{2,647095-8}{4} = 0,661774-2 = 0,04589.$$

$$\sqrt[\frac{3}{4}]{6^{\frac{3}{5}}} = \frac{\frac{3}{5}\log. 6}{\frac{3}{4}} = \frac{4.3.\log. 6}{5.3} = \frac{4 \log. 6}{5} = \frac{4}{5}.0,778151 =$$

$$0,622521 = 4,1929.$$

Es wird nun auch nicht mehr schwer sein, zusammengesetzte Ausdrücke zu berechnen:

$$\sqrt[5]{\frac{57,389 \times 0,000896}{453}} = \frac{1}{5}(\log. 57,389 + \log. 0,000896 - \log. 453)$$

$= 0,211007 = 0,16255.$

$$\sqrt[5]{\frac{7}{3}\sqrt[4]{6}} = \frac{1}{5}\left(\log. 7 - \log. 3 + \frac{\log. 6}{4}\right) = 0,112503 =$$

1,2957.

$$\frac{(991,767)^5 \times 12,34}{(20,358 \times 10,1575)^6} = (5 \log. 991,767 + \log. 12,34) -$$

$6 (\log. 20,358 + \log. 10,1575) = 2,180367 = 151,458.$

$$\sqrt[4]{\frac{132 \times (7,356)^9}{\sqrt{3,25^5}}} = \frac{1}{4}\left(\log. 132 + 9 \log. 7,356 - \frac{5}{2}\log. 3,25\right)$$

$= 2,160160 = 144,59.$

$$\sqrt[3]{\frac{5,3896 \times 0,07365^2}{8,378^2 \times 0,0067259}} = \frac{1}{3}(\log. 5,3896 + 2 \log. 0,07365 -$$

$2 \log. 8,378 - \log. 0,0067259) = 0,597290 - 1 = 0,39563.$

$$\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{123}{17}\right)^5}{\left(\frac{8}{17}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{13}\right)^4} = \frac{5^3.123^5.17^2.13^4}{8^2.7^4.7^3.17^5} = \frac{5^3.123^5.13^4}{8^2.7^7.17^3} =$$

$(3 \log. 5 + 5 \log. 123 + 4 \log. 13) - (2 \log. 8 +$
$7 \log. 7 + 3 \log. 17) = 5,588996 = 388147,2.$

$\sqrt[3]{(5{,}03 + \sqrt[5]{0{,}2})}$, $\log. \sqrt[5]{0{,}2} = -0{,}139794$, oder $0{,}860206 - 1$, welchem Logarithmus die Zahl 0,72478 entspricht, daher $5{,}03 + 0{,}72478 = 5{,}75478$, mithin

$$\sqrt[3]{5{,}75478} = \frac{1}{3} \log. (5{,}75478) = 0{,}253343 = 1{,}792.$$

$\sqrt[16]{\frac{43 + 5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}}$, $\log. 5\sqrt[3]{278} = 1{,}513652 = 32{,}6326$, und

$43 + 32{,}6326 = 75{,}6326$, mithin $\sqrt[16]{\frac{75{,}6326}{\sqrt[5]{17}}} =$

$$\frac{1}{16} (\log. 75{,}6326 - \frac{1}{5} \log. 17) = 0{,}102039 = 1{,}2648.$$

$\sqrt[7]{(46 - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{72^4})^5}$. Man berechne den Ausdruck $- \sqrt[3]{4}$, wie wenn er positiv wäre, so erhält man $\frac{\log. 4}{3} = 0{,}200687 =$ 1,587, eben so ist $\sqrt[3]{72^4} = \frac{4}{3} \log. 72 = 2{,}476443 = 299{,}53$, also $\log. \sqrt[7]{(46 - 1{,}587 + 299{,}53)^5} = \log. \sqrt[7]{(343{,}943)^5} =$ $\frac{5}{7} \log. 343{,}943 = 1{,}811775 = 64{,}829.$

Anmerkung. Daß bei Berechnung solcher Ausdrücke die Resultate in der 5ten, und noch mehr in den folgenden Zifferstellen nicht immer genau richtig sind, ist leicht zu erklären. Nichts desto weniger muß jedoch diese Behandlungsweise beibehalten werden, da jeder andere Weg äußerst mühsam ist, und nur sehr selten in ähnlichen Fällen mehr Genauigkeit verlangt wird.

Da die Logarithmen der Zahlen selbst Zahlen sind, so lassen sich auch Logarithmen von Logarithmen angeben. Ist z. B. $a = \log. b$, so ist $\log. a = \log. \log. b$.

Von den Gleichungen.

82.

Die Verbindung zweier algebraischer Ausdrücke von gleichem Werthe durch das Gleichheitszeichen, heißt eine Gleichung im Allgemeinen.

Die beiden Ausdrücke heißen die Seiten, und die Theile der Seiten die Glieder.

Eine Gleichung ist entweder analytisch, oder algebraisch.

Eine analytische Gleichung ist die bloße Verknüpfung zweier Formen, unter denen eine und dieselbe Größe dargestellt wird, z. B.

$$(a \pm x)^2 = a^2 \pm 2ax + x^2.$$

$$6a - \frac{3b}{4} + \frac{3a}{2} + b = \frac{15a}{2} + \frac{b}{4}.$$

$$(x^2 - 1)\,(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Eine solche entsteht immer, wenn auf der einen Seite irgend eine Rechnung angedeutet, und auf der andern das dieser Rechnung entsprechende Resultat gesetzt ist.

Die beiden Seiten bleiben hiebei einander gleich, man mag den (einzelnen) Buchstaben was immer für Werthe beilegen.

Haben die beiden Seiten, außer Gleichheit des Werthes, auch noch Gleichheit der Form, so heißt die Gleichung identisch. $a + c = a + c$.

Sind aber die beiden Ausdrücke wesentlich von einander unterschieden, so daß nemlich der eine nicht durch Umformung des andern entstanden ist, so heißt die Gleichung algebraisch.

$$a + d = b - c.$$
$$3a - 4 = 5a - 6.$$

In diesen Gleichungen kann man den Buchstaben nicht beliebige Werthe beilegen, ohne die Gleichung zu zerstören, d. h. die Gleichheit der beiden Ausdrücke aufzuheben, sondern der Werth einer jeden der vorkommenden Größen ist von dem Werthe der übrigen zusammengenommen, abhängig, d. h. die einzelnen Größen bestimmen einander gegenseitig, und mit der Veränderung einer derselben ist die nothwendige Aenderung einer andern in der Gleichung verbunden.

Diese gegenseitige Bestimmung macht es also möglich, den Werth einer jeden durch die andern darstellen zu können.

Die Größe einer Gleichung, deren Werth nun gefunden werden soll, heißt die unbekannte; und um durch die Bezeichnung diese in einer Gleichung merkbar zu machen, hat man dafür nach §. 19 die letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets (x, y, z, ersteren Buchstaben besonders, wenn nur eine unbekannte vorhanden ist) gewählt, so daß man in der Gleichung $3a + 4x = 5b - 3c$ sogleich wüßte, daß x die zu suchende sei.

Gleichungen, in denen die unbekannten Größen nur mit Zahlen verbunden sind, heißen numerische, kommen aber allgemeine Größen vor, Literal-Gleichungen.

Man theilt die Gleichungen hinsichtlich der Exponenten der unbekannten Größen ein, in Gleichungen vom 1, 2, 3, 4 . . . nten Grade, je nachdem der höchste Exponent der unbekannten 1, 2, 3, 4 . . . oder n ist.

Gleichungen vom ersten Grade heißen einfache, vom zweiten quadratische, vom dritten cubische, vom vierten biquadratische, die übrigen werden nach den Graden genannt. Gleichungen, deren höchster Exponent > 2 ist, heißen höhere.

Ferner heißt eine Gleichung rein, wenn der Exponent der unbekannten überall gleich ist, unrein, wenn die Exponenten verschieden sind; so sind

$3x^2 \pm a = b \pm ax^2$
$ax^3 \pm m = c$
$x^4 - 16 = 0$
} reine.

$3x^2 + 4x = 7$
$x^3 + 2x^2 = 24$
$x^n - c = x^{n-3}$
} unreine.

Eine Gleichung, worin einige Potenzen der unbekannten von der höchsten bis zur niedrigsten fehlen, heißt unvollständig, wo dagegen die Potenzenreihe durch kein fehlendes Glied unterbrochen ist, vollständig.

Gleichungen, worin die unbekannte Größe selbst als Exponent erscheint, wollen wir logarithmische nennen, da ihre Auflösung nur mit Hilfe der Logarithmen möglich ist.

Ein anderer Unterschied ist noch hinsichtlich der Anzahl der unbekannten Größen in einer Aufgabe. Man hat daher Gleichungen mit 1, 2, 3 . . . n unbekannten Größen.

Je nachdem die unbekannte Größe nur einen oder mehrere Werthe hat, oder haben kann, heißt die Gleichung bestimmt, oder unbestimmt. Der in einer einfachen Gleichung für die unbekannte gefundene Werth ist der einzig mögliche; folglich sind alle einfachen Gleichungen bestimmt. Sind aber in einer Gleichung zwei oder mehrere unbekannte Größen gegeben, so müssen auch eben so viele, wesentlich von einander verschiedene Gleichungen, (d. h., daß keine aus der andern abgeleitet werden kann) gegeben sein, wenn die unbekannten bestimmte unveränderliche Werthe erhalten sollen, weil jede Gleichung immer nur eine der in ihr enthaltenen Größen durch die andern bestimmt. Enthält dagegen eine Aufgabe weniger Gleichungen, als unbekannte Größen, so ist selbe unbestimmt, und es kommt den unbekannten eine begränzte oder unbegränzte Anzahl von Werthen zu, je nachdem einschränkende Bedingungen statt finden, oder nicht.

Die Eintheilung der Gleichungen nach Graden, welche wegen der Auflösung von höchster Wichtigkeit ist, erhält erst dann die volle Bestimmtheit, wenn die Gleichung in Bezug auf die unbekannte keiner Vereinfachung mehr fähig, oder, wie man zu sagen pflegt, geordnet ist.

83.

Es geschieht dieses Ordnen, was man auch die Reduction, oder das Zurückführen einer Gleichung auf die einfachste Form, nennt, nur allein durch Anwendung des Grundsatzes:

Gleiche Größen auf gleiche Weise verändert, sind auch nach der Veränderung wieder gleich.

Eine Gleichung heißt aber geordnet, wenn

1) die unbekannte nicht mehr als Divisor erscheint,

2) alle Glieder, in welchen die unbekannte vorkommt, auf der einen, die übrigen auf der andern Seite stehen,

3) Glieder, welche dieselbe Potenz der unbekannten enthalten, reducirt sind,

4) die unbekannten unter keinem Wurzelzeichen, oder mit gebrochenem Exponent erscheinen,

5) die unbekannten nach den fallenden Potenzen geordnet sind, und

6) das erste Glied allzeit positiv ist, und zum Coefficient die Einheit hat.

In welcher Ordnung jedoch diese Reductionen vorgenommen werden sollen, darüber gilt kein Gesetz; die vortheilhafte Behandlung ist aus der Beschaffenheit der Gleichung abzunehmen, und muß durch Uebung, und sorgfältige Betrachtung erlernt werden.

84.

Aus diesem Axiom folgt:

1) Für $x + a = b$.

auch $b = x + a$.

Man kann daher die Seiten einer Gleichung wechseln.

2) Wenn $x \pm a = b$, so ist auch

$x = b \mp a$; denn

$$\begin{array}{r} x + a = b \\ -a = -a \\ \hline x = b - a, \text{ und} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - a = b \\ +a = +a \\ \hline x = b + a \end{array}$$

mit einerlei.

oder auch $x \pm a - b = 0$.

Es läßt sich daher in jeder Gleichung jedes Glied mit verändertem Zeichen auf die entgegengesetzte Seite setzen, und also auch jede Gleichung so umformen, daß ihr Werth $= 0$ ist.*)

---

*) Man mißdeute jedoch diesen Ausdruck nicht dahin, daß er für jeden Werth von x, oder allgemein 0 sei, sondern es ist nur die Forderung ausgesprochen, einen solchen Werth für x zu finden, daß der ganze Ausdruck $= 0$ wird, so ist $3x - 12 = 0$ nur dann richtig, wenn $x = 4$ ist.

$6x + 3a + 2b - 3a = 3m + 4 + 2b$ ist einerlei mit $6x = 3m + 4$; d. h. gleiche Größen auf beiden Seiten mit denselben Zeichen, und auf einer Seite mit verschiedenen Zeichen verschwinden.

3) Wenn $x = b$, so ist auch

$$mx = mb \text{ und } \frac{x}{m} = \frac{b}{m}.$$

Man kann nemlich alle Glieder der Gleichung mit einer und derselben Größe multipliciren, oder dividiren. Ersteres dient zur Wegschaffung der Brüche aus einer Gleichung, letzteres zur Entfernung gemeinschaftlicher Faktoren.

Aus $\frac{x}{a} + c = \frac{d}{a} - 3x$ wird durch Multiplication der Gleichung mit a

$$x + ac = d - 3ax.$$

Da aber die unbekannte zweimal in derselben Potenz vorkommt, so addire man die Coefficienten derselben, und setze der in Klammern gestellten Summe die unbekannte als Multiplicator bei, also

$$(3a + 1)\,x = d - ac.$$

$$x = \frac{d - ac}{3a + 1}.$$

Sind verschiedene Nenner vorhanden, so nehme man den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend als Multiplicator der Gleichung. z. B.

$$\frac{x}{2} - \frac{3x + 1}{4} + \frac{5x - 3}{6} = \frac{7 - 12x}{15}$$

gemeinschaftlicher Dividend von 2, 4, 6 und 15 ist 60; also

$$30x - 15(3x + 1) + 10(5x - 3) = 4 \,.\, (7 - 12x)$$

$$30x - 45x - 15 + 50x - 30 = 28 - 48x$$

$$83x = 73$$

$$x = \frac{73}{83}.$$

Bei dem Wegschaffen der Nenner muß man, wenn selbe zusammengesetzte Größen enthalten, mit großer Vorsicht zu Werke gehen, und vorzüglich die Faktoren der zusammengesetzten Größen zu finden trachten, wenn die Arbeit nicht überflüssig weitläufig werden soll.

$$\frac{x}{x - 2} - \frac{1}{2} + \frac{x + 1}{4x - 8} - \frac{3 - x}{6x + 12} = \frac{18}{5} - \frac{x + 1}{8x^2 - 32}.$$

Durch Zerfällen der Nenner findet man

$$\frac{x}{x-2} - \frac{1}{2} + \frac{x+1}{4(x-2)} - \frac{(3-x)}{6(x+2)} = \frac{18}{5} - \frac{(x+1)}{8(x^2-4)}$$
$$= \frac{18}{5} - \frac{(x+1)}{8(x+2)(x-2)}.$$

Die einfachen Faktoren sind 2, 4, 5, 6, 8, und der gemeinschaftliche Dividend 120, für die zusammengesetzten $(x+2)$ und $(x-2)$ ist $(x+2)(x-2) = x^2-4$ gemeinschaftlicher Dividend; und daher $120(x^2-4)$ Multiplicator der Gleichung. Für die Ausübung ist es aber in ähnlichen Fällen vortheilhafter, den allgemeinen Multiplicator in seine Faktoren zerlegt anzugeben, um die Division mit den einzelnen Nennern zu erleichtern, nach §. 33.

Es ist demnach

$\frac{x}{x-2} \times 120.(x+2)(x-2) = 120x.(x+2) = 120x^2+240x$

$-\frac{1}{2} \times 120(x+2)(x-2) = -60(x+2)(x-2) = -60x^2+240$

$+\frac{x+1}{4(x-2)} \times 120.(x+2)(x-2) = 30.(x+1)(x+2) = 30x^2+90x+60$

$-\frac{(3-x)}{6(x+2)} \times 120(x+2)(x-2) = -20.(3-x)(x-2) = 20x^2-100x+120.$

$=$ $=$

$\frac{18}{5} \times 120.(x+2)(x-2) = 432(x+2)(x-2) = 432x^2-1728$

$-\frac{(x+1)}{8(x+2)(x-2)} \times 120(x+2)(x-2) = -15(x+1) = -15x-15.$

oder

$120x^2+240x-60x^2+240+30x^2+90x+60+20x^2-100x+120$
$= 110x^2+230x+420 = 432x^2-15x-1745.$

woraus $322x^2 - 245x = 2163.$

oder $x^2 - \frac{35x}{46} = \frac{309}{46}.$

Da der Multiplicator oder Divisor der Gleichung jede Zahl folglich auch (-1) sein kann, so erhält man für die Gleichung

$$c - x = d - f + m$$
$\times -1$ $\quad -c + x = -d + f - m.$

Man kann daher in jeder Gleichung ihres Werthes unbeschadet die Zeichen aller Glieder ändern.

Kommt in einer Gleichung die Unbekannte mit negativen Exponenten (sie mögen alle gleich oder verschieden sein), vor, so werden diese weggeschafft, wenn man entweder für jede Größe mit negativem Exponent einen Bruch setzt, dessen Zähler 1, und Nenner die unbekannte mit positivem Exponenten ist, oder die ganze Gleichung mit x^m multiplicirt, wenn der größte Exponent (— m) ist. z. B.

$$3x^{-2} + 4x^{-1} = \frac{3}{x} + 4, \text{ ist entweder}$$

$$\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} = \frac{3}{x} + 4$$

$\times x^2$ $\quad 3 + 4x = 3x + 4x^2$

$$4x^2 - x = 3$$

$$x^2 - \frac{x}{4} = \frac{3}{4}$$

oder $\quad 3x^{-2} + 4x^{-1} = \frac{3}{x} + 4$ mit x^2 multiplicirt

$$3x^{2-2} + 4x^{2-1} = 3x + 4x^2$$

$$3 + 4x = 3x + 4x^2$$

$$4x^2 - x = 3$$

$$x^2 - \frac{x}{4} = \frac{3}{4} \text{ wie oben.}$$

Finden sich in allen Gliedern einer Gleichung, oder im Zähler und Nenner eines Gliedes gemeinschaftliche Faktoren, so werden diese durch Division weggebracht, und dadurch die Gleichung vereinfacht.

$$3x - 12ab + 24 = 18x - 54$$

$: 3 \quad x - 4ab + 8 = 6x - 18$

$$5x = 26 - 4ab$$

$$x = \frac{26 - 4ab}{5}.$$

$$\frac{12x^3 - 108x}{15x^3 - 45x^2} = \frac{32}{25}$$

$$\frac{12x^3 - 108x}{15x^3 - 45x^2} = \frac{12 \cdot (x^3 - 9x)}{15(x^3 - 3x^2)} = \frac{3 \cdot 4 \cdot x(x^2 - 9)}{3 \cdot 5 \cdot x^2(x - 3)} =$$

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot x \cdot (x + 3)(x - 3)}{3 \cdot 5 \cdot x^2(x - 3)} = \frac{4(x + 3)}{5x} = \frac{32}{25}.$$

$$4 \cdot 5(x + 3) = 32x$$
$$20x + 60 = 32x$$
$$32x - 20x = 60$$
$$12x = 60$$
$$x = 5.$$

$\frac{cx^n}{a + px} = \frac{dx^m}{a + px}$ ist einerlei mit $cx^n = dx^m$.

Gleiche Nenner können daher gleich wegbleiben, denn wenn die Theile gleich sind, sind die ganzen nothwendig auch gleich.

Der Ausdruck

$cx^n = dx^m$ wird durch Division mit x^n

$c = dx^{m-n}$, oder

$dx^{m-n} = c$

$x^{m-n} = \frac{c}{d}$.

4) Aus $x = b$ folgt auch

$x^m = b^m$, und $\sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{b}$.

Die Erhebung zu Potenzen dient, die in einer Gleichung vorhandenen irrationalen Glieder der unbekannten wegzuschaffen, d. h. die Gleichung rational zu machen.

Der einfachste Fall ist hiebei, wenn die unbekannte als einfache Größe und mit dem Coefficient 1 unter verschiedenen Wurzelzeichen erscheint. z. B. $\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} = 28$.

Man bringt in diesem Falle alle Wurzelgrößen auf gleiche Benennung, hier also $\sqrt[6]{x^2} + 3\sqrt[6]{x^3} = 28$.

Setzt man nun statt $\sqrt[6]{x} = y$, so hat man die Gleichung $y^2 + 3y^3 = 28$; wo dann zuletzt der für y gefundene Werth $= \sqrt[6]{x}$ gesetzt, und daraus erst x gesucht werden muß.

Ist aber die unbekannte mit andern durch + oder — verbunden, unter einem Wurzelzeichen, so muß der rationale Theil auf die eine, die übrigen Größen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebracht, und beide Seiten zur Potenz des Wurzelexponenten erhoben werden.

$$3x - 2\sqrt{x} = 8$$
$$3x - 8 = 2\sqrt{x}.$$

$$9x^2 - 48x + 64 = 4x.$$
$$9x^2 - 52x = -64$$
$$x^2 - \frac{52x}{9} = -\frac{64}{9}.$$

Wenn aber mehrere Wurzelgrößen vorhanden sind, so muß das Verfahren so lange wiederholt werden, bis alle Wurzelzeichen verschwunden sind, was nicht selten wegen der öftern Wiederholung sehr beschwerlich ist. z. B.

$a + \sqrt{x} = \sqrt[4]{x}$, gibt quadrirt $a^2 + 2a\sqrt{x} + x = \sqrt{x}$, oder

$$a^2 + x = \sqrt{x} - 2a\sqrt{x} = (1 - 2a)\sqrt{x}$$

welches neuerdings quadrirt

$a^4 + 2a^2x + x^2 = (1 - 4a + 4a^2)x$ gibt, woraus zuletzt $x^2 + (4a - 2a^2 - 1)x = -a^4$.

$\sqrt{5x + 1} - \sqrt{3x} = \sqrt{x} - 2$ quadrirt

$$5x + 1 - 2\sqrt{(5x + 1)\,(3x)} + 3x = x - 2.$$
$$7x + 3 = 2\sqrt{(5x + 1)\,(3x)} \text{ quadrirt}$$
$$49x^2 + 42x + 9 = 60x^2 + 12x, \text{ woraus}$$
$$x^2 - \frac{30x}{11} = \frac{9}{11}.$$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt{x + 1} = a$$
$$\sqrt{x + 1} = a - \sqrt[3]{x}, \text{ und quadrirt}$$
$$x + 1 = a^2 - 2a\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}.$$

Setzt man hier $\sqrt[3]{x} = y$, so erhält man

$$y^3 - y^2 + 2ay = a^2 - 1.$$

Befinden sich beide Theile einer Gleichung unter demselben Wurzelzeichen, so sind die Größen unter dem Wurzelzeichen auch wieder gleich.

$\sqrt[m]{c + x} = \sqrt[m]{ax + b}$ mit $c + x = ax + b$ einerlei.

Sind hiebei die Wurzelexponenten verschieden, so suche man für selbe den gemeinschaftlichen Dividend, und erhebe beide Seiten zur Potenz des Dividends.

$\sqrt[m]{a + x} = \sqrt[2m]{x^2 - ax + c}$, gibt zur Potenz (2m) erhoben

$$(a + x)^2 = x^2 - ax + c$$
$$a^2 + 2ax + x^2 = x^2 - ax + c.$$
$$x = \frac{c - a^2}{3a}.$$

$\sqrt[m]{(a + c)^{ns}} = \sqrt[3n]{(px + q)^r}$ zur Potenz 3mn erhoben

$$(a + c)^{3n^2s} = (px + q)^{rm}, \text{ und nun } \sqrt[rm]{}$$
$$(a + c)^{\frac{3n^2s}{rm}} = px + q, \text{ woraus}$$
$$x = \frac{(a + c)^{\frac{3n^2s}{rm}} - q}{p}.$$

$\sqrt{x} : \sqrt{(a + x)} = \sqrt{b} : \sqrt{c}$. Zur zweiten Potenz erhoben =

$$x : a + x = b : c.$$
$$cx = ab + bx$$
$$cx - bx = ab$$
$$x = \frac{ab}{c - b}.$$

$$(\sqrt{x} + 25) : (\sqrt{x} + 3) = 5 + 3\sqrt{x} : (3\sqrt{x} - 6)$$
$$(\sqrt{x} + 25)(3\sqrt{x} - 6) = (\sqrt{x} + 3)(5 + 3\sqrt{x})$$
$$3x + 69\sqrt{x} - 150 = 3x + 14\sqrt{x} + 15.$$
$$55\sqrt{x} = 165$$
$$\sqrt{x} = 3$$
$$x = 9.$$

So findet man aus

$87x^3 - 18x^4 = 110x^2 - x^5$, $x^3 - 18x^2 + 87x = 110$.

$\frac{(x - 3)(x - 5)}{x - 7} + \frac{3}{x - 1} = 12$, $x^3 - 21x^2 + 122x = 120$.

$6\sqrt[3]{1 - x} = 4x + 2\sqrt[3]{1 - x}$, $x^3 + x = 1$.

$3\sqrt{x - 1} = 5\sqrt[4]{x - 1}$, $x = 8\frac{58}{81}$.

$\sqrt{7x + 8} - \sqrt{2x + 9} = \sqrt{x + 1}$, $x^2 - \frac{15x}{2} = 4$.

$\sqrt{x - 1} = \sqrt[3]{x + 3}$, $x^3 - 4x^2 - 3x = 10$.

$3\sqrt{x - 1} = 2\sqrt[3]{x}$, $729x^3 - 739x^2 + 11x = 1$.

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = x^2 + 1,\ x^4 + 4x = 1.$$

$$\sqrt{\frac{147}{x^2} + 33} - \sqrt{\frac{147}{x^2} - 2} = 5,\ x^2 = 49.$$

Ueber die Gleichungen, in welchen die unbekannte als Exponent erscheint, sehe man bei den logarithmischen Gleichungen.

Für Gleichungen mit mehreren unbekannten ist kein besonderes Reductionsverfahren nöthig, indem dabei nur jede einzelne nach den aufgestellten Gesetzen geordnet wird.

Auflösung der Gleichungen.

85.

Der Zweck, aus dem man sich mit Gleichungen beschäftigt, ist wieder der allen übrigen Rechnungsarten gemeinsame, den Werth der unbekannten Größen vermittelst der gegebenen Bedingungen (oder was dasselbe ist, aus den bekannten) darzustellen.

Dieser Zweck ist erreicht, sobald alle Verbindungen der unbekannten mit den bekannten aufgehoben sind, d. h. die unbekannten allein auf einer Seite, in der ersten Potenz und mit positivem Zeichen, und ihr Werth auf der andern Seite steht. Das hiezu nöthige Verfahren heißt die Auflösung der Gleichung.

Daß aber eine solche Aufhebung der Verbindungen möglich sei, ergibt sich daraus, daß jede Rechnungsart ihren Gegensatz hat, folglich jede mit der unbekannten verbundene Größe durch das entgegengesetzte Verfahren, wodurch sie verbunden ist, entfernt werden kann.

Die Prüfung oder Probe endlich, ob eine Gleichung richtig aufgelöst sei, geschieht durch Substitution der gefundenen Werthe in die gegebene Gleichung. Wird hiebei jedesmal der doppelte Ausdruck wirklich erhalten, wie ihn die Aufgabe fordert, so ist dieß ein Beweis des richtigen Verfahrens.

Die für die unbekannten erhaltenen Werthe nennt man, besonders bei Gleichungen, die den ersten Grad übersteigen, auch die Wurzeln der Gleichungen.

Die Auflösung der Gleichungen überhaupt macht das eigentliche Geschäft der Algebra aus.

Anmerkung. Das Wort Algebra stammt aus dem Arabischen, so wie überhaupt die Europäer die mathematischen Wissenschaften größtentheils

von denselben erhielten. Noch heißt im Spanischen, welche Sprache viele Worte von den Mauren beibehalten, die, obwohl ein ursprünglich arabischer Volksstamm, im Anfange des 8ten Jahrhunderts in Spanien eindrangen, Algebrista ein Mann, der Beinbrüche und Verrenkungen heilt, so daß mit dem Worte Algebra auf analoge Weise das Einrichten und Auflösen der Gleichungen, und das hiebei vorkommende Verfahren, die Brüche wegzuschaffen, bezeichnet sein soll. Nach Andern hat im 9ten Jahrhundert zu Sevilla ein Mann gelebt, mit Namen Gebr, der sich um die Verbreitung der mathematischen Wissenschaften sehr verdient gemacht haben soll, aus welchem Namen durch Vorsetzung des arabischen Artikels al, das Wort Algebra entstanden sei.

Gleichungen des ersten Grades

a) mit einer unbekannten.

86.

Eine Gleichung vom ersten Grade, oder einfache Gleichung ist aufgelöst, sobald die §. 83 angegebenen Erfordernisse hergestellt sind. Es fällt demnach bei diesen Gleichungen Auflösung und Reduction zusammen.

Die Wichtigkeit des Gegenstandes fodert aber, noch einige Beispiele mit ihrer Auflösung nebst einigen besondern Fällen hier anzuführen:

1. $$\frac{x^2 - a^2}{x + a} = \frac{m - cx}{b}.$$

Da $x^2 - a^2$ als Differenz zweier Quadrate $=$ $(x + a)(x - a)$, so hat man

$$\frac{(x + a)(x - a)}{(x + a)} = \frac{m - cx}{b}, \text{ oder}$$

$$x - a = \frac{m - cx}{b}, \quad bx - ab = m - cx$$

$$bx + cx = (b + c)x = m + ab$$

$$x = \frac{m + ab}{b + c}.$$

2. $$\sqrt[5]{(m^2 + n)} = \sqrt[4]{\frac{(m^2 + n)}{d(x + a)}}.$$

Erhebt man beiderseits zur vierten Potenz, so erhält man

$$\sqrt[3]{(m^2 + n)^4} = \sqrt[4]{\left(\frac{m^2 + n}{d(x + a)}\right)^4} =$$

$$\sqrt[3]{(m^2 + n)^4} = \frac{m^2 + n}{d(x + a)}.$$

Da nun das erste Glied die unbekannte nicht mehr enthält, so ist das wiederholte Erheben der Gleichung zur 3ten Potenz überflüssig. Man setze dagegen

$$(m^2 + n)^{\frac{4}{3}} = \frac{m^2 + n}{dx + ad}, \text{ und beiderseits mit } (m^2 + n)$$

dividirt

$$(m^2 + n)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{dx + ad} \text{ oder}$$

$$(dx + ad)\,(m^2 + n)^{\frac{1}{3}} = 1.$$

$$(dx + ad) = \frac{1}{(m^2 + n)^{\frac{1}{3}}}.$$

$$dx = \frac{1}{(m^2 + n)^{\frac{1}{3}}} - ad, \text{ endlich}$$

$$x = \frac{1}{d\sqrt[3]{(m^2 + n)}} - a.$$

3. $\frac{cx^m}{a + bx} = \frac{fx^m}{d + ex}$, und : x^m.

$$\frac{c}{a + bx} = \frac{f}{d + ex}.$$

$$c(d + ex) = f(a + bx)$$

$$cd + cex = af + bfx.$$

$$cex - bfx = af - cd.$$

$$(ce - bf)\,x = af - cd$$

$$x = \frac{af - cd}{ce - bf}.$$

Setzt man aber in $cd + cex = af + bfx$ die Glieder mit der unbekannten rechts, so erhält man

$$cd - af = bfx - cex, \text{ und}$$

$$\frac{cd - af}{bf - ce} = x.$$

so daß man auf den ersten Augenblick glauben sollte, daß der unbekannten, gegen das oben ausgesprochene Gesetz, zwei verschiedene Werthe zukommen.

Allein bei Vergleichung der beiden erhaltenen Ausdrücke findet sich, daß beide Werthe vollkommen gleich sind, indem jeder, im Zähler und Nenner mit — 1 multiplicirt, den andern gibt.

Dieser Fall tritt sehr oft, doch nur jedesmal bei Literalgleichungen ein.

4. $6{,}15x - 659{,}38 - x = 1{,}82 - 0{,}36x$

$6{,}15x - x + 0{,}36x = 659{,}38 + 1{,}82$

$5{,}51x = 661{,}2$

$$x = \frac{661{,}2}{5{,}51} = \frac{66120}{551} = 120.$$

5. $3{,}25x - 5{,}007 + 3\frac{1}{3}x = 4{,}2 + 4\frac{3}{5}x$

$$3{,}25x - 5{,}007 + \frac{10x}{3} = 4{,}2 + \frac{23x}{5}.$$

$48{,}75x - 75{,}105 + 50x = 63 + 69x$

$48{,}75x + 50x - 69x = 63 + 75{,}105$

$29{,}75x = 138{,}105$

$$x = \frac{138{,}105}{29{,}75} = 4{,}642\ldots$$

Man sieht hieraus, daß, wenn in einer Gleichung gewöhnliche und Decimalbrüche zusammenkommen, nicht nothwendig alle Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln sind. Ja sogar könnte dieß der Genauigkeit des Resultates schaden. z. B.

6. $x + 0{,}25x + \frac{x}{3} = 19$ gibt

$3x + 0{,}75x + x = 57.$

$4{,}75x = 57$

$$x = \frac{57}{4{,}75} = 12.$$

Würde man statt $\frac{x}{3} = 0{,}333\ldots x$ setzen, so erhielte man

$x + 0{,}25x + 0{,}333x = 1{,}583x = 19$, woraus

$$x = \frac{19}{1{,}583} = 12{,}0025\ldots \text{ um } \frac{4}{1583} > 12.$$

Dagegen kann eine Verwandlung der Decimalbrüche in gewöhnliche nie der Genauigkeit des Resultats schaden.

7. $(a + x)(b + x) - a(b + c) = \frac{a^2c}{b} + x^2.$

$$ab + ax + bx + x^2 - ab - ac = \frac{a^2c}{b} + x^2.$$

$$ax + bx = \frac{a^2c}{b} + ac.$$

$$abx + b^2x = a^2c + abc.$$

$$(ab + b^2)x = a^2c + abc.$$

$$x = \frac{a^2c + abc}{ab + b^2} = \frac{(a + b)ac}{(a + b)b} = \frac{ac}{b}.$$

8. $12x - \frac{3x - 1}{4} + \frac{4x + 2}{5} = 86 - \frac{x - (x - 3)}{3}.$

$$12x - \frac{(3x - 1)}{4} + \frac{4x + 2}{5} = 86 - \frac{(x - [x - 3])}{3}.$$

Man ordne zuerst den letzten Ausdruck, es ist nemlich

$$\frac{x - (x - 3)}{3} = \frac{x - x + 3}{3} = 1, \text{ also}$$

$$12x - \frac{(3x - 1)}{4} + \frac{4x + 2}{5} = 85 \text{ und } \times 20.$$

$$240x - (15x - 5) + 16x + 8 = 1700.$$

$$240x - 15x + 5 + 16x + 8 = 1700.$$

$$241x = 1687.$$

$$x = 7.$$

9. $\frac{2x - 6}{3} + 12 = x + 10 - \frac{x}{3}$ $\times 3.$

$$2x - 6 + 36 = 3x + 30 - x.$$

$$0 = 0.$$

d. h. jeder Werth für x muß der Gleichung Genüge leisten. Es ist daher keine algebraische, sondern eine analytische Gleichung, was auch bei näherer Betrachtung bald sichtbar wird.

10. $2x - 6 = \frac{3x + 10}{2} - 11.$ $\times 2$

$$4x - 12 = 3x + 10 - 22$$

$$x = 0.$$

Diese Gleichung ist allerdings richtig, und algebraisch, aber nur für $x = 0$, was nichts auffallendes hat; so führt z. B. die Aufgabe: was ist zu 7, 9 und 15 zu zählen, bis 31 heraus kommt, auf die Gleichung

$$7 + 9 + 15 + x = 31, \text{ woraus } x = 0.$$

11. $$7x + 10 = \frac{14x + 21}{2} + 3. \qquad \times 2$$

$$14x + 20 = 14x + 21 + 6$$
$$14x - 14x = 27 - 20$$
$$0 = 7.$$

Da aber dies nie möglich ist, so enthielt die Aufgabe, wodurch diese Gleichung entstanden, einen Widerspruch oder eine Ungereimtheit. z. B. Welche Zahl ist ihrem 3ten, 4ten und 5ten Theile zusammengenommen gleich? was nie sein kann, da

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ nie} = 1 \text{ ist.}$$

Diese Beispiele und die §. 84. geordneten, mögen hinreichen, die wichtigsten Fälle bei einfachen Gleichungen gezeigt zu haben. Daß es aber überhaupt nicht möglich sei, die mannigfaltigen Formen, Vereinfachungen, und Vortheile der Auflösung durch einige Beispiele kennen zu lernen, wird wohl jederman bei den zahllos möglichen Fällen leicht einsehen.

Uebung und Scharfsinn werden das aus wenigen Beispielen erlernte, mit Vortheil zur Erlangung größerer Fertigkeit anzuwenden wissen. Zu diesem Zwecke folgen noch einige Beispiele nebst dem Werthe der unbekannten: aus

$$\frac{a}{a+x} + \frac{a}{a-1} = \frac{1}{a+x} \text{ ist } x = \frac{2a - 1 - 2a^2}{a}.$$

$$\frac{x-a}{a+1} - \frac{(a+x)(2a-1)}{a^2-1} + \frac{a+1}{a-1} = 0, \; x = \frac{2a^2 - 4a + 1}{-a},$$

$$\text{oder } x = \frac{4a - 2a^2 - 1}{a}.$$

$$\frac{m \cdot (x - m^2)}{2n - 3m} = n^2 - \frac{nx}{2n - m}, \quad x = (2n - m)(n - m).$$

$$\frac{(x-1)}{3} \frac{(b-1)}{2a} + \frac{1}{2} = x - 1 + \frac{3a}{b-1}, \; x = \frac{b - 3a - 1}{b - 1}.$$

$$\frac{x}{n-1}+\frac{n-1}{2n}-x=\frac{x}{n}-\frac{2x}{n^2-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{n-2}{2},\ x=\frac{n-1}{2}$$

$$\frac{2a^2x}{4a^2-b^2}+ab=\frac{a(x-b^2)}{2a-b}-\frac{bx}{4a+2b},\quad x=\frac{4a^2(2a+b)}{b}.$$

$$\frac{a}{\sqrt{x}}-\frac{b\sqrt{x}}{c}=(m-n)\sqrt{x}+\frac{c}{\sqrt{x}},\quad x=\frac{(c-a)c}{cn-cm-b}.$$

$$c+b\sqrt[m]{(x+d)}=f,\quad x=\left(\frac{f-c}{b}\right)^m-d.$$

$$\frac{ax}{b}\sqrt{(m^2x^2+p^2)}+\frac{amx^2}{b}=cx,\quad x=\frac{b^2c^2-a^2p^2}{2abcm}.$$

$$\frac{7x^n}{x-1}=\frac{6x^{n+1}+x^n}{x+1}-\frac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1},\ x=-\frac{11}{12}.$$

$$\frac{3x+6}{25}:\frac{100-x}{7}=3:11,\quad x=25.$$

$$\frac{ax+x}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x},\quad x=\frac{1}{a+1}.$$

$$\sqrt{\frac{1}{m^2}+\sqrt{\left(\frac{4}{m^2x^2}+\frac{9}{x^4}\right)}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{m},\quad x=2m.$$

$$\frac{\sqrt{4x+13}}{\sqrt{x+2}}=\frac{16+2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}},\quad x=49.$$

Anwendung.

87.

Fragt man nach den Gegenständen, bei deren Berechnung sich Gleichungen gebrauchen lassen, so müssen wir antworten, daß selbe überall angewendet werden können, wo immer eine Größe in einem Verhältniß, oder einer Beziehung zu andern bekannten, oder unbekannten steht, und daraus bestimmt werden soll.

Ein Satz aber, der aus gegebenen Bedingungen den Werth der unbekannten Größe aufzufinden verlangt, heißt eine Aufgabe.

Eine Aufgabe mathematisch behandeln, heißt die ausgedrückten Bedingungen, oder Eigenschaften der in der Frage vorkommenden Unbekannten, in einer oder mehreren Gleichungen darzustellen, und aus ihnen diese Unbekannten zu finden. Ersteres heißt man das Ansetzen, oder Bilden einer Gleichung, was nicht selten, besonders für

Anfänger mit großer Schwierigkeit verbunden ist, letzteres die Auflösung.

Das Bilden einer Gleichung ist aber nichts anderes, als das Uebertragen der logischen Verbindung der zur Aufgabe gehörigen Bedingungen, in die mathematische Sprache.

Es muß daher die Aufgabe stets genau überdacht, und vor allem nachgesehen werden, was gesucht werden soll.

Um aber die zu suchende (oder unbekannte) den ausgesprochenen Veränderungen unterwerfen zu können, bezeichne man selbe durch einen Buchstaben.

Hierauf müssen die gegebenen Bedingungen alle auf arithmetische Operationen zurückgeführt, und die Gleichung der Angabe zu Folge gebildet werden, woraus dann der Werth der Unbekannten gefunden wird.

Kommen mehrere unbekannte Größen vor, die sich nicht auf eine zurückführen lassen, so müssen auch, falls die Aufgabe bestimmt sein soll, aus der Angabe eben so viele Gleichungen gebildet werden können.

Einfachheit in der mathematischen Darstellung ist das erste und vorzüglichste Erforderniß. Jede Aufgabe mit der möglichst kleinen Anzahl von unbekannten, so wie diese in den möglichst niedern Potenzen zu erhalten, muß daher immerhin beabsichtigt werden.

Wesentliche Erleichterung ist, alle oft künstliche, und Anfänger leicht irre führenden Einkleidungen, die nicht selten Bestimmungen enthalten, welche zur Bildung einer Gleichung gar nicht nothwendig sind, wegzulassen, so daß sich die sämmtlichen Bedingungen der Aufgabe leicht auf arithmetische Operationen zurückführen lassen.

Daher sind besonders Anfängern der Verständlichkeit wegen, solche Aufgaben zu empfehlen, welche nur Zahlen, durch bloße arithmetische Bestimmungen ohne alle Einkleidung zu suchen verlangen. Die beiden Aufgaben:

Ein Vater bedauert, daß er schon 5mal so alt sei, als sein Sohn, tröstet sich aber damit, daß er in 7 Jahren nur noch 3mal so alt sei. Wie alt ist der Vater? und

Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß wenn man zu ihrem fünffachen Produkte 7 addirt, 3mal so viel herauskommt, als wenn 7 zu der Zahl selbst addirt wird?

führen auf eine und dieselbe Gleichung $5x + 7 = (x + 7)3$ und es ist doch sicher die letztere ungemein leichter in eine Gleichung überzutragen, als erstere, weil die Bedingungen der erstern in der 2ten schon auf ganz unzweideutige arithmetische Operationen zurückgeführt sind.

Es ist daher sehr vortheilhaft, jeden algebraischen Ausdruck, so wie auch Gleichungen, in verschiedene Sätze einzukleiden, um sich dadurch Fertigkeit in der gegenseitigen Uebersetzung der gewöhnlichen und mathematischen Sprache zu erwerben.

Nicht weniger nützlich ist es, ein und dieselbe Aufgabe auf verschiedene Weise aufzulösen, um dabei den Unterschied in der Behandlung, und den Vorzug einer Auflösungsart vor der andern kennen zu lernen; so wie, wenn die unbekannte gefunden ist, die Aufgabe so zu wenden, daß man eine andere, (bisher bekannte), als unbekannt betrachtet und sucht, was auch zugleich als Probe dienen kann, ob die zuerst gefundene, anfangs unbekannte, die richtige sei.

Wenn aber auch viele Aufgaben, zumal leichtere, durch bloßes Raisonnement aufgelöst werden können, so steht doch eine solche Auflösung der algebraischen Behandlung, wegen der derselben eigenen Einfachheit, Sicherheit und Allgemeinheit weit nach, und ist nur in seltenen Fällen zulässig.

Practische Beispiele.

88.

1. Von 2 Zahlen ist die kleinere 25, und ihr Unterschied genau $\frac{3}{5}$ ihrer Summe, welches ist die größere Zahl?

Heißt die größere x, so ist der Unterschied $x - 25$, und die Summe $x + 25$, also

$$x - 25 = \frac{3}{5}(x + 25)$$

$$x = 100.$$

2. Welche Zahl gibt, wenn man zu ihr 19 addirt, und die Summe durch 4 theilt, die Hälfte einer Zahl zum Quotienten, die um eins kleiner ist, als die gesuchte?

Ist die gesuchte Zahl x, so erhält man, wenn 19 dazu addirt,

und mit 4 getheilt wird, $\frac{x + 19}{4}$, was der Hälfte der um eins ver-minderten gesuchten Zahl, also $\left(\frac{x - 1}{2}\right)$ gleich ist.

$$\frac{x + 19}{4} = \frac{x - 1}{2}$$

$$x = 21.$$

3. Man verlangt eine Zahl, welche die Eigenschaft hat, daß, wenn ich dazu ihre Hälfte addire, so viel über 60 herauskommt, als die Zahl selbst unter 65 ist?

Ist die Zahl x, so muß $x + \frac{1}{2} x - 60$ so viel sein, als $65 - x$ d. i.

$$\frac{3x}{2} - 60 = 65 - x$$

$$x = 50.$$

4. Man theile 32 in 2 ungleiche Theile, so daß, wenn der kleinere durch 6, der größere durch 5 dividirt, die Summe der Quotienten 6 ist.

Ist der kleinere Theil x, so ist der größere $32 - x$, und daher

$\frac{x}{6} + \frac{32 - x}{5} = 6$, woraus $x = 12 =$ dem kleinern

und $32 - 12 = 20 =$ dem größern.

5. Man theile 70 in 3 ungleiche Theile, so daß, der 2te durch den ersten dividirt, 2 zum Quotient und 1 zum Rest, der 3te durch den 2ten dividirt, 3 zum Quotient und 3 zum Rest gebe.

Ist der erste Theil x, so muß der 2te, da er durch den ersten dividirt, 2 zum Quotient, und 1 als Rest gibt, um 1 größer als 2mal so groß sein, also $2x + 1$, und eben so der dritte 3mal so groß, als der 2te und 3 dazu, oder $6x + 6$, also

$$x + 2x + 1 + 6x + 6 = 70$$

$x = 7$ der erste

$2x + 1 = 15$ der zweite

$6x + 6 = 48$ der dritte.

6. 1170 fl. sollen unter 3 Personen A, B, C nach Verhältniß ihres Alters vertheilt werden. Nun ist B um den 3ten Theil älter, C aber doppelt so alt als A. Wie viel erhält jeder?

Nennt man den Theil des Erstern x, so ist der des B

$$x + \frac{1}{3}x = \frac{4x}{3},$$ und der von C $= 2x$, daher

$$x + \frac{4x}{3} + 2x = 1170.$$

$$x = 270 = A,\ \frac{4x}{3} = 360 = B,\ 2x = 540 = C.$$

7. Zwei Knaben errichten eine Sparkasse, A gibt 2 fl. 30 kr., B 6 fl. 30 kr., und jeden Tag legt jeder der beiden 3 kr. dazu, wann hat B gerade nochmal so viel in der Cassa, als A?

Geschieht dies in x Tagen, so hat A 2 fl. 30 kr. $+ 3x$, oder $150 + 3x$ kr., und B 6 fl. 30 kr. $+ 3x = 390 + 3x$, da nun der 2te, doppelt so viel als der erste haben soll, so muß

$$150 + 3x = \frac{390 + 3x}{2},\ \text{also}$$

$$x = 30 \text{ sein.}$$

In 30 Tagen hat der erste 2 fl. 30 kr. + 1 fl. 30 kr. = 4 fl.
» » » » der zweite 6 fl. 30 kr. + 1 fl. 30 kr. = 8 fl.

Frägt man unter denselben Bedingungen, wann der 2te 3mal so viel habe, so ergibt sich

$$150 + 3x = \frac{390 + 3x}{3} = 130 + x,\ \text{woraus}$$

$$x = -10.$$

Die Bedeutung des negativen Werthes für x ergibt sich hier, wenn man ihn mit dem obigen positiven vergleicht. Nach der vorigen Aufgabe mußten beide noch 30 Tage sammeln, um die Bedingungen zu erfüllen, wenn nun das positive x ein Sammeln bedeutet, so zeigt negativ x nothwendig ein Ausgeben, oder Wegnehmen an, und — 10 ist demnach nichts anderes, als beide müssen 10 Tage so viel wegnehmen, als sie vorhin täglich ersparten, nemlich jeder 3×10 kr., dann hat der erste 2, und der andere 6 fl.

8. Einem Courier, der schon vor 12 Tagen abgereist, wird auf demselben Wege ein anderer nachgeschickt, ihn einzuholen. Wenn nun der erste täglich 9 Meilen, und der zweite 13 zurücklegt, wie viel Tage wird der letztere brauchen, den andern einzuholen?

Setzt man die Anzahl der Tage $= x$, so wird der Weg des ersten $9x + 12 \cdot 9$, und der des zweiten $13x$ sein. Da sie

aber einander einholen sollen, so müssen ihre beiden Wege gleich sein, daher

$$9x + 108 = 13x$$
$$x = 27 \text{ Tage.}$$

Auf ähnliche Weise wird folgende Aufgabe gelöst.

Um 12 Uhr stehen beide Zeiger einer Uhr über einander: wann und wie oft werden diese Zeiger in den nächsten zwölf Stunden wieder über einander stehen?

Da der Stundenzeiger bekanntlich 5 Minuten zurück legt, während der Minutenzeiger 60 Minuten macht, so ist die Geschwindigkeit des letztern 12mal so groß, als die des erstern. Auch muß der Minutenzeiger, wenn der Stundenzeiger um x Minuten vorgerückt ist, diesen einzuholen, $x + 60$ Minuten zurücklegen, welcher Weg dem zwölffachen des Minutenzeigers gleich sein muß, daher

$$x + 60 = 12x, \text{ woraus}$$
$$x = 5\frac{5}{11},$$

wo sie sich das erstemal decken, d. i. $5\frac{5}{11}$ Minuten nach 1 Uhr. In jeder folgenden Stunde decken sie sich immer um $5\frac{5}{11}$ Minuten später, und da $5\frac{5}{11}$ in 60 eilfmal enthalten ist, so decken sie sich in 12 Stunden eilfmal, wobei das Uebereinanderliegen um 12 Uhr nicht gerechnet ist.

Um z. B. zu wissen, wann sie sich zwischen 6 und 7 Uhr decken, kann man auch auf folgende Weise verfahren:

Um 6 Uhr ist der Stundenzeiger 30 Minuten voran, und wenn die Zeit, die er noch zu laufen hat, um von dem andern eingeholt zu werden, x heißt, so erhält man die Gleichung

$$x + 30 = 12x, \text{ woraus}$$
$$x = 2\frac{8}{11}.$$

Es ist demnach $30 + 2\frac{8}{11} = 32\frac{8}{11}$ Minuten über 6 Uhr.

Auf ähnliche Weise kann auch gefunden werden, zu welcher Zeit zu jeder Stunde die beiden Zeiger einander gerade gegenüber stehen, d. h. 30 Minuten von einander entfernt sind.

9. Ein Vater hinterläßt seiner Frau und seinen Kindern ein bedeutendes Vermögen, welches in gleiche Theile vertheilt werden sollte.

Gebe man jedem 5600 fl., so blieben 4600 fl. übrig, und wollte man jedem 7000 fl. geben, so wären 8000 fl. zu wenig da. Wie viel waren es Erben, und wie viel hatte der Mann Vermögen. Da durch die Anzahl der Erben das Vermögen bekannt ist, so enthält die Aufgabe nur eine unbekannte Größe.

Sind es nemlich x Erben, so ist das Vermögen der erstern Theilung zu Folge $5600x + 4600$, und nach der zweiten Theilung $7000x - 8000$, also

$$5600x + 4600 = 7000x - 8000$$
$$1400x = 12600.$$
$$x = 9 \text{ Erben, nemlich}$$

8 Kinder und die Frau.

Hätte die Aufgabe noch den Beisatz erhalten, daß die Frau 2 oder 3 Theile bekomme, so wären es um so viel Kinder weniger, als die Frau mehr Theile bekommt, als einen.

10. Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um den 3ten Theil, und nimmt jährlich 100 fl. davon. Nach 3 Jahren hat sich sein Vermögen verdoppelt: wie viel hatte er anfangs?

Wenn er anfangs x fl. hatte, so hatte er nach dem ersten Jahre

$$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3},$$

nach 2 Jahren

$$\frac{4x - 400}{3} - 100 + \frac{\left(\frac{4x - 400}{3} - 100\right)}{3} = \frac{16x - 2800}{9},$$

nach 3 Jahren

$$\frac{16x - 2800}{9} - 100 + \frac{\left(\frac{16x - 2800}{9} - 100\right)}{3} = \frac{64x - 14800}{27},$$

welches nun dem doppelten Vermögen von Anfang gleich ist:

$$\frac{64x - 14800}{27} = 2x, \quad \text{und } x = 1480 \text{ fl.}$$

Bei solchen langen Vorbereitungen ist es rathsam, die einzelnen Glieder immer gleich zu ordnen, um nicht eine der nicht selten vielen angezeigten Operationen, und vorhandenen Klammern zu übersehen.

11. Auf einer Universität waren $1\frac{1}{2}$ mal so viel Ausländer als Inländer, nachdem aber $\frac{2}{3}$ der Ausländer, und $\frac{3}{4}$ der Inländer die Universität verlassen hatten, waren nur noch 600 Studirende vorhanden? Wie viel waren es Anfangs.

War die Anzahl der Inländer x, so ist die der Ausländer $\frac{3x}{2}$.

Abgegangen sind $\frac{3}{4}x$ der Inländer, und $\frac{2}{3} \times \frac{3x}{2} = x$ Ausländer; also blieben $\frac{x}{4}$ Inländer, und $\frac{x}{2}$ Ausländer, welches daher 600 sind. $\frac{x}{4} + \frac{x}{2} = 600$, woraus $x = 800$ Inländer, und $\frac{3}{2}x = 1200$ Ausländer.

12. Ein Buchbinder braucht zum Einbinden dreier Bücher 2 Tage, ein anderer zu 5 Bücher 3 Tage, und ein dritter zu 7 Bücher 4 Tage. Wie lange werden alle 3 zu 118 Bänden brauchen?

Da der erste in 2 Tagen 3 Bücher liefert, so macht er alle Tage $\frac{3}{2}$, der zweite eben so $\frac{5}{3}$, und der dritte $\frac{7}{4}$.

Die erforderliche Zeit sei x, so liefert der erste $\frac{3x}{2}$, der zweite $\frac{5x}{3}$, und der letzte $\frac{7x}{4}$, mithin $\frac{3x}{2} + \frac{5x}{3} + \frac{7x}{4} = 118$, und $x = 24$ Tage, denn in dieser Zeit macht

$$A = \frac{3}{2} \cdot 24 = 36.$$

$$B = \frac{5}{3} \cdot 24 = 40.$$

$$C = \frac{7}{4} \cdot 24 = \frac{42}{118}.$$

13. Ein Hund verfolgt einen Hasen, der ihm 88 Sprünge voraus ist. Der Hund macht 7 Sprünge, bis der Hase 5 macht, und kommt in 2 Sprüngen so weit, als der Hase in 3. In wie viel Sprüngen wird der Hase eingeholt sein?

Setzen wir, daß der Hund in 2 Sprüngen z. B. einen Weg von 1 Klafter zurück lege, und in einer bestimmten Zeit, etwa in 3

Sekunden 7 Sprünge mache, so legt er in jener Zeit einen Weg von $\frac{7}{2}$ Klafter zurück, d. i. die Geschwindigkeit des Hundes wird durch $\frac{7}{2}$ dargestellt werden können. Unter diesen Voraussetzungen muß, den Bedingungen der Aufgabe gemäß, der Hase in 3 Sekunden einen Weg von $\frac{5}{3}$ Klafter machen, d. i. die Geschwindigkeit des Hasen wird durch $\frac{5}{3}$ bezeichnet. Nehmen wir nun an, daß der Hase nach x Sprüngen eingeholt werde, so muß der Hund einen Raum $=$ (88 $+$ x) Hasensprüngen zurücklegen, und da sich bei einerlei Zeit die Geschwindigkeiten gerade wie die durchlaufenen Räume verhalten, so erhält man die Proportion

$$\frac{7}{2} : \frac{5}{3} = 88 + x : x, \text{ woraus}$$

$$x = 80$$

d. h. der Hase kann noch 80 Sprünge machen, und weil 3 Hasensprünge $=$ 2 Hundsprünge, oder 1 Hasensprung $= \frac{2}{3}$ Hundsprünge, so sind 88 $+$ 80, d. i. 168 Hasensprünge $= 168 . \frac{2}{3}$ $= 56 . 2 = 112$ Hundssprünge; nemlich der Hund erreicht den Hasen nach 112 Sprüngen.

14. Das Alter des Diophantus, des Verfassers des ältesten Buches über Algebra, welches wir aufzuweisen haben, wird in einem Epigramm der griechischen Anthologie auf folgende Art angegeben: $\frac{1}{6}$ seines Lebens brachte er als Kind und Knabe zu; $\frac{1}{12}$ als Jüngling; nach Verlauf von $\frac{1}{7}$ seines Alters heirathete er; 5 Jahre darauf wurde ihm ein Sohn geboren, welcher die Hälfte des väterlichen Alters erreicht hatte, als er starb; worauf der Vater noch 4 Jahre lebte; — wie alt ist er geworden?

Der Aufgabe gemäß ist:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x, \text{ woraus}$$

$$x = 84.$$

15. Ein Wasserbehälter kann durch 2 Röhren, die zugleich laufen, in 16 Stunden gefüllt werden, durch die eine könnte es allein in 24 Stunden geschehen, in wie vielen Stunden könnte es durch die andere allein geschehen?

Es geschehe durch die zweite Röhre allein in x Stunden. Nach der Aufgabe ist weder die Größe des Behälters, noch die Weite der Röhren bekannt, man nehme daher an, der Behälter fasse a Wasser, (man kann es auch zu 1 annehmen), was z. B. Cubikfuße, Fuder ꝛc. sein können. Die erste Röhre füllt in einer Stunde dann $\frac{a}{24}$, und die zweite in einer Stunde $\frac{a}{x}$ des Behälters; laufen sie nun zugleich, so füllen sie in einer Stunde $\frac{a}{24} + \frac{a}{x}$ des Behälters, folglich in 16 Stunden $16\left(\frac{a}{24} + \frac{a}{x}\right)$, da aber der Behälter jetzt voll ist, so muß $16\left(\frac{a}{24} + \frac{a}{x}\right) = a$ sein, oder

$$16\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{x}\right) = 1, \text{ woraus}$$

$$x = 48.$$

16. Ein Herr versprach seinem Bedienten für das Jahr 60 fl. und ein Kleid, als Lohn; nach 7 Monaten wurde der Bediente fortgeschickt, und sein Herr bezahlte ihn nach dem Versprechen, er gab ihm 25 fl. und das Kleid. Wie hoch hat der Herr das Kleid gerechnet?

Das Kleid sei x fl. werth, so ist der jährliche Lohn (60 + x) fl., daher der 1monatliche $\frac{60 + x}{12}$ fl., folglich der 7monatliche $7\left(\frac{60 + x}{12}\right)$, da aber der Bediente für 7 Monat 25 fl. und das Kleid bekam, so hat er (25 + x) fl. bekommen, daher

$$7\left(\frac{60 + x}{12}\right) = 25 + x, \text{ woraus}$$

$$x = 24.$$

17. Ein Kaufmann sendet seiner Schwester als Geschenk 3256 fl. mit folgender Bestimmung: Wenn du einen Sohn hast, so gib ihm drei Theile, und zwei Theile behalte für dich; hast du aber

eine Tochter, so erhält diese nur den vierten Theil. Nun hatte aber die Frau, wider Vermuthen ihres Bruders, einen Sohn und eine Tochter. Wie muß jene Summe vertheilt werden?

Setzen wir den Antheil der Mutter = x, so ist der des Sohnes $= x + \frac{1}{2}x = \frac{3x}{2}$, und jener der Tochter $= \frac{x}{4}$; also

$$x + \frac{3x}{2} + \frac{x}{4} = 3256, \text{ woraus}$$

$$x = 1184 \text{ gefunden wird.}$$

Die Mutter erhielt also	1184 fl.
Der Sohn 1184 + 592 = ...	1776 »
Die Tochter $\frac{1184}{4}$ = ...	296 »
	Summe = 3256 fl.

18. Ein Copist wurde gefragt, wie viele Bogen er wöchentlich schreibe. Er antwortete: »Ich arbeite nur vier Stunden täglich, und kann daher nicht 70 Bogen liefern, wie ich wünsche. Wenn ich aber täglich 10 Stunden arbeiten könnte, so würde ich wöchentlich gerade so viel über 70 Bogen schreiben, als ich jetzt weniger schreibe.« Wie viele Bogen schrieb er wöchentlich?

Er schreibe, zu 4 Stunden täglich, wöchentlich x Bogen, so ist das, was noch fehlt an 70 Bogen = 70 — x. Arbeitet er aber 10 Stunden täglich, das ist eine $2\frac{1}{2}$mal längere Zeit als 4 Stunden, so liefert er wöchentlich $2\frac{1}{2}x$ Bogen, welches nach der Aufgabe, mehr als 70 Bogen beträgt. Dieser Ueberschuß ist aber = $2\frac{1}{2}x - 70$. Es ist daher

$$2\frac{1}{2}x - 70 = 70 - x, \text{ folglich}$$

$$x = 40 \text{ Bogen.}$$

19. In einer gewissen Stadt mußte ehedem jeder Hauseigenthümer den siebenten Theil seines erhaltenen Miethzinses als Zinssteuer contribuiren; nachher wurde diese Auflage erhöhet, und er mußte den sechsten Theil abgeben. Um wie viel mußte er seine Miethsleute steigern, wenn er eben so viel als vorher übrig behalten wollte?

Es sei der jährliche Ertrag seines Hauses = a gewesen; hiervon hat er Zinssteuer entrichtet $\frac{a}{7}$, folglich ist ihm verblieben $\frac{6a}{7}$. Er steigert nun seine Inwohner um x; so bleibt ihm $\frac{5a + 5x}{6}$; und da er das nemliche Einkommen behalten soll, so ist

$$\frac{6a}{7} = \frac{5a + 5x}{6}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{a}{35} \text{ folgt.}$$

Er muß also jeden Einwohner um den 35sten Theil des vorigen Zinses steigern.

20. Ein Feldherr wollte sein Regiment in ein Quadrat stellen. Er versuchte es auf 2 Arten. Das erstemal bleiben ihm 39 Mann übrig; das zweitemal, da er die Seite des Quadrats um einen Mann vergrößerte, fehlten ihm 50 Mann, um das Quadrat voll zu machen. Wie stark war das Regiment?

Stellt er das erstemal in jede Seite x Mann, so enthält das Quadrat x^2, und das ganze Regiment $x^2 + 39$ Mann. Das zweite Quadrat enthält $(x + 1)^2$, folglich das ganze Regiment $(x + 1)^2 - 50$, daher die Gleichung

$$x^2 + 39 = (x + 1)^2 - 50, \text{ woraus}$$

$$x = 44,$$

mithin das ganze Regiment

$$(44)^2 + 39, \text{ oder } (45)^2 - 50 = 1975 \text{ Mann.}$$

21. Man soll den Inhalt dreier Fässer A, B und C aus folgenden Angaben bestimmen. Füllt man aus A das Faß B an, so bleiben in A $\frac{2}{3}$ des ganzen Inhalts. Füllt man aber C aus A an, so bleiben in A $\frac{5}{9}$ des Inhalts. Füllt man endlich B und C aus A an, so bleiben nur noch 8 Eimer in A. Wie viel Eimer hält jedes der drei Fässer?

Der Inhalt von A sei = x, so ist der Inhalt von B = $\frac{1}{3}$x, und jener von C = $\frac{4}{9}$x, und demnach

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}x + 8, \text{ woraus}$$

$$x = 36;$$

also A hält 36 Eimer, B $\frac{36}{3} = 12$ Eimer, und C $\frac{36 \cdot 4}{9} = 16$ Eimer.

22. Ein Silberarbeiter braucht 24 Mark 13löthiges Silber. Da er blos 10löthiges und 15löthiges hat, so fragt sich, wie viel er von jeder Sorte nehmen muß?

24 Mark 13löthiges Silber enthalten 312 Loth reines Silber. Nimmt er nun von dem 10löthigen x Mark, folglich von dem 15löthigen 24 — x, so erhält man die Gleichung

$$10x + 15(24 - x) = 312, \text{ woraus}$$

$$x = 9\frac{3}{5} \text{ Mark 10löthiges,}$$

und daher $24 - 9\frac{3}{5} = 14\frac{2}{5}$ Mark 15löthiges Silber.

Es ist sehr zu empfehlen, alle die Gleichungen, auf die man durch die angeführten Aufgaben geführt wurde, in die gewöhnliche Sprache, das heißt, in Aufgaben ohne alle Einkleidung überzutragen, um Fertigkeit in dem Uebersetzen zu erlangen, und zugleich die Zahlenverbindungen kennen zu lernen, welche in (nicht selten sehr schwierig scheinenden) Aufgaben enthalten sind.

89.

Setzt man in einer Aufgabe statt bestimmter Zahlen allgemeine Größen, und sucht aus der Gleichung den Werth der unbekannten, so nennt man denselben eine Formel; und soll eine solche zur Auflösung einer bestimmten Aufgabe gebraucht werden, so hat man nur an die Stelle der Buchstaben die entsprechenden Zahlen zu setzen. z. B. die Aufgabe Nro. 8 allgemein zu machen, setze man, der Courier sei vor n Tagen abgereist, und mache täglich a, und der 2te b Meilen, wann wird der zweite den ersten einholen? So heißt die Gleichung

$$na + ax = bx, \text{ und } x = \frac{na}{b - a}.$$

Da nun n = 12, a = 9, b = 13 war, so erhält man

$$x = \frac{108}{13 - 9} = 27, \text{ wie oben.}$$

Liest man diese Formel mit der jedem Buchstaben zukommenden Bedeutung, so lautet sie: man multiplicire die Tage, welche der erste früher abreiste, mit der Anzahl der jeden Tag zurückgelegten Meilen, und dividire dieß Produkt durch den Unterschied der täglichen Wege des zweiten und ersten, oder kürzer, man theile den vom ersten Boten schon vor der Abreise des zweiten gemachten Weg, durch die Differenz der Wege des zweiten und ersten.

Der gefundene Ausdruck $\frac{na}{b - a}$ gibt aber nicht nur die Tage des Zusammentreffens an, es mögen n, a und b was immer für Größen sein, sondern beantwortet auch alle Fragen, welche durch Wendungen der Aufgabe entstehen, denn aus $x = \frac{na}{b - a}$ folgt

$n = \frac{(b - a)x}{a}$, $a = \frac{bx}{n + x}$, $b = \frac{ax + na}{x}$, wodurch also nicht nur a, b und n bestimmt sind, wenn x bekannt ist, sondern auch zugleich der Ansatz für jede Wendung der Aufgabe deutlich gemacht wird.

Aus der Formel $x = \frac{na}{b - a}$ folgt, daß x um so größer wird, je größer a und n ist, d. h. die Boten erreichen einander um so später, je früher der erstere abgereist, und je mehr Meilen er täglich macht.

Ist $b = a$, so wird $x = \frac{na}{0} = \infty$, d. h. reist der erste und zweite gleich schnell, so ist die Zeit des Zusammentreffens unendlich groß, oder, was dasselbe ist, sie kommen nie zusammen, was auch ganz natürlich, da der erste schon früher abgereist ist. Ist endlich $a > b$, so wird x negativ, und bedeutet, daß die Boten in entgegengesetzter Richtung reisen müßten, um zusammenzukommen, und zwar so lange, als der negative Werth angibt.

So wie jede Formel in Worte übersetzt eine Regel angibt, wodurch alle Aufgaben, worin die der Formel zum Grunde liegenden Beziehungen von Größen vorkommen, aufgelöst werden, so läßt sich auch eine mathematische Regel als Formel darstellen, wenn man für die vorkommenden Größen Buchstaben setzt, und dieselben durch die in der Regel angeführten Rechnungsarten vermittelst Zeichen verbindet.

Obwohl dabei die Wahl der Buchstaben ganz gleichgiltig ist, so ist es doch rathsam, in einer Formel solche Buchstaben zu wählen, die so viel als möglich an die damit bezeichneten Größen erinnern.

Allgemeine Formeln haben noch das Nützliche, daß selbst Nicht-mathematiker selbe zur Auflösung von Aufgaben benützen können, sobald sie die den einzelnen Buchstaben zukommende Bedeutung und Eigenthümlichkeiten wissen. Aber auch der Mathematiker bedient sich derselben, leitet aus Hauptformeln noch andere ab, und stellt sie tabellarisch zusammen, wenn eine Aufgabe in allen Beziehungen wichtig, und die Reduction oft nicht ganz einfach ist, da die Entwicklung einer Formel nicht selten viel Zeit, ohne allen weitern Vortheil, erfodert. Man sehe darüber bei den Progressionen.

b) mit mehreren unbekannten.

90.

In jeder Aufgabe mit mehreren unbekannten Größen müssen nach §. 82 so viele Gleichungen, deren keine durch Transformation der andern hergestellt ist, gegeben sein, als unbekannte Größen vorkommen, wenn die Aufgabe bestimmt sein soll, so sind

$$x + y = 10 \text{ und}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 5$$

$$2x - 5y = 8 \text{ und}$$

$$3x - \frac{15y}{2} = 12$$

nicht zwei verschiedene Gleichungen; denn

$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 5$ ist nichts anderes, als

$\frac{x + y}{2} = \frac{10}{2}$, also die Hälfte der erstern, und

$3x - \frac{15y}{2} = 12$ wird erhalten, wenn $2x - 5y = 8$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt wird.

Eben so sind $x + y = 7$, $x - z = 2$, und $y + z = 5$ nicht drei verschiedene Gleichungen, da $y + z = 5$ erhalten wird, wenn die 2te ($x - z = 2$) von der erstern ($x + y = 7$) abgezogen wird.

Ein anderer Fall, welcher nicht selten die Auflösung unmöglich macht, ist, wenn ein Widerspruch unter den Gleichungen vorkommt, der oft auf den ersten Augenblick nicht in die Augen fällt, und daher Anfänger in große Verlegenheit bringen kann, ohne zu wissen, woher sie rühre, z. B. es sei gegeben

$$x + y = 10$$
$$x + z = 7$$
$$y - z = 4.$$

wo letztere Gleichung neben den beiden ersten nicht bestehen kann, indem

$$x + y = 10$$
$$-x - z = -7$$
$$y - z = 3$$

ist, und also unmöglich zugleich 4 sein kann.

Oder
$$x + y = 8$$
$$2x + 2y = 13,$$

wo jedoch die Unmöglichkeit leicht zu ersehen ist.

Solche Widersprüche kommen, besonders wenn die Aufgabe mehrere unbekannten enthält, nicht selten vor, und haben ihren Grund in einer flüchtig angesetzten Aufgabe, wo die einzelnen Gleichungen nicht gehörig überdacht, oder verglichen wurden.

Sind aber alle diese Fälle beseitigt, so geschieht die Auflösung dieser Gleichungen überhaupt dadurch, daß man alle unbekannten Grösßen bis auf eine (gleich welche) aus der Angabe wegzubringen sucht, so daß zuletzt nur eine einfache Gleichung vorhanden ist, deren Auflösung bereits erörtert ist, und nun mit Hilfe des daraus gefundenen Werthes alle übrigen durch bloßes Subftituiren gefunden werden. Es kann daher eigentlich nicht von einer Auflösung der Gleichungen mit mehreren unbekannten Grösßen die Rede sein, sondern nur von der Art und Weise, wie man die unbekannten nach und nach verschwinden mache, um eine einfache Gleichung zu erhalten. Hiezu aber haben wir mehrere Mittel, deren vortheilhafte Anwendung nach Beschaffenheit der Aufgabe wieder Uebung und Scharfsinn am besten kennen lehrt.

91.

Die allgemeine Form einer jeden geordneten Gleichung des ersten Grades mit zwei unbekannten Grösßen ist

$$ax + by = m$$
$$cx + dy = n.$$

Es sei gegeben die Summe zweier Zahlen und ihre Differenz, wie heißen die Zahlen? Nennt man die größere x, die kleinere y, ist ihre Summe 10, Differenz 4, so erhält man die Gleichungen

$$x + y = 10$$
$$x - y = 4.$$

I. Auflösung: Man suche aus der einen Gleichung einen Werth für x, und setze denselben für x in die zweite.

Aus $x + y = 10$ ist $x = 10 - y$, und daher die zweite Gleichung $x - y = 10 - y - y = 4$

$$10 - 2y = 4$$
$$\frac{10 - 4}{2} = y$$
$$3 = y$$

also $x = 10 - y = 10 - 3 = 7$.

Man nennt dieß Verfahren, eine unbekannte wegzuschaffen, die Substitution; es beruht auf dem Axiome: Gleiche Größen können für einander gesetzt werden. Da der Werth von $x = 7 = \frac{10 + 4}{2}$

und der von $y = 3 = \frac{10 - 4}{2}$

so folgt, daß wenn die Summe und Differenz zweier Zahlen gegeben ist, die größere der beiden gleich der halben Summe und halben Differenz, die kleinere dem halben Unterschiede von Summe und Differenz gleich sei.

II. Auflösung: Man suche den Werth einer und derselben unbekannten Größe aus beiden Gleichungen, so läßt sich aus beiden Werthen, die einander nothwendig gleich sind, wieder eine neue Gleichung mit einer unbekannten bilden.

Aus $x + y = 10$ } folgen für x die Werthe: $10 - y$ und
und $x - y = 4$ } $4 + y$, daher die neue Gleichung
$10 - y = 4 + y$, woraus wieder $y = 3$.

Dieß Verfahren, welches auf dem Satze: zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich, beruht, heißt die Comparation.

III. Auflösung: Sind in beiden Gleichungen die Coefficienten einer und derselben unbekannten Größe gleich groß, die Größen selbst mit verschiedenen Zeichen versehen, so addire man die beiden

Gleichungen, so erhält man ebenfalls eine Gleichung der andern unbekannten.

Da in den Gleichungen $x + y = 10$ und $x - y = 4$ die Coefficienten schon gleich, nemlich 1, sind, dazu die Zeichen von y verschieden, so erhält man durch Addition der beiden $2x = 14$, woraus $x = 7$ wie oben.

Der Werth für die andere unbekannte wird in beiden letzteren Fällen, wie oben, durch Substitution gefunden.

Da aber diese beiden Eigenschaften: Gleichheit der Coefficienten und Ungleichheit der Zeichen, wenn sie in einer Aufgabe noch nicht vorhanden sind, sich leicht herstellen lassen, das übrige Verfahren zur Auffindung der neuen Gleichung höchst einfach ist, so bleibt immerhin dieser Reductionsmethode, die den Namen Elimination führt, der Vorzug vor den beiden übrigen. Sie beruht auf dem Axiom: gleiche aber eutgegengesetzte Grösßen heben einander auf.

Sind nemlich die Coefficienten der zu eliminirenden Grösße verschieden, so werden selbe dadurch gleichgemacht, daß man dafür den gemeinschaftlichen Theiler sucht, mit jedem einzelnen Coefficient in diesen Theiler dividirt, und mit dem erhaltenen Quotient die Gleichung multiplicirt, z. B. in

$$\left.\begin{aligned} 3y - 6x &= 13 \\ 4x + 5y &= 20 \end{aligned}\right\} \text{ sei x zu eliminiren.}$$

Der gemeinschaftliche Dividend für 6 und 4 ist 12, also muß die obere Gleichung mit $\frac{12}{6} = 2$, und die untere mit $\frac{12}{4} = 3$ multiplicirt werden, wornach man erhält

$$\begin{aligned} 6y - 12x &= 26 \\ 12x + 15y &= 60 \\ \hline 21y &= 86 \\ y &= 4\tfrac{2}{21}. \end{aligned}$$

Sollten die Zeichen der zu eliminirenden Grösße noch nicht verschieden sein, so ändere man selbe in einer Gleichung, gewöhnlich in derjenigen, welche den kleinern Werth hat, durch die ganze Gleichung.

Löst man die oben angegebene Gleichung $ax + by = m$

und $cx + dy = n$

nach den bisherigen Auflösungsarten auf, so erhält man durch Substitution:

$$x = \frac{m - by}{a}.$$

$$c\left(\frac{m - by}{a}\right) + dy = n.$$

$$cm - cby + ady = an$$

$$(ad - bc)y = an - cm$$

$$y = \frac{an - cm}{ad - bc} \text{ und}$$

$$x = \frac{m - b\left(\frac{an - cm}{ad - bc}\right)}{a} = \frac{dm - bn}{ad - bc}.$$

Comparation:

$$ax + by = m \qquad x = \frac{m - by}{a}$$

$$cx + dy = n \qquad x = \frac{n - dy}{c}$$

$$\frac{m - by}{a} = \frac{n - dy}{c} = mc - bcy = an - ady$$

$$ady - bcy = an - cm$$

$$y = \frac{an - cm}{ad - bc}, \text{ und}$$

x wird wieder durch Subſtitution gefunden.

Elimination:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}\right\} =$$

$$adx + bdy = dm$$

$$bcx + bdy = bn$$

$$- \quad - \quad -$$

$$(ad - bc)x = dm - bn.$$

$$x = \frac{dm - bn}{ad - bc}, \text{ wie oben.}$$

y erhält man abermal durch Subſtitution.

92.

Die Reduction der Gleichungen mit drei und mehreren unbekannten Größen, geſchieht ganz ſo, wie bei denen mit zweien, nur muß zur allmähligen Hinwegſchaffung der unbekannten das einmal

begonnene Verfahren so oft wiederholt werden, bis man die Aufgabe auf eine Gleichung mit einer unbekannten Größe gebracht hat. Man habe die Gleichung

$$x + y + z = 15$$
$$2z - 3x + y = 10$$
$$4x - 3y + 2z = 11.$$

Substitution: Man suche aus der ersten Gleichung einen Werth für x, und setze diesen in die 2te und 3te. Es ist aber

$$x = 15 - y - z, \text{ also}$$
$$2z - 3(15 - y - z) + y = 10.$$
$$4(15 - y - z) - 3y + 2z = 11.$$

welche auf einfachere Form gebracht

$$5z + 4y = 55$$
$$7y + 2z = 49 \text{ heißen, woraus wieder aus der ersten}$$

Gleichung

$$z = \frac{55 - 4y}{5} \text{ ist, welcher Werth in die letztere sub-}$$

stituirt, die Gleichung

$$7y + 2\left(\frac{55 - 4y}{5}\right) = 55 \text{ gibt, woraus}$$

$$y = 5, \quad \text{also } z = \frac{55 - 20}{5} = 7$$

und endlich $x = 15 - 5 - 7 = 3$.

Comparation: Aus den drei Gleichungen erhält man für x folgende Werthe:

$$x = 15 - y - z$$
$$= \frac{-10 + y + 2z}{3}$$
$$= \frac{11 + 3y - 2z}{4}.$$

Bildet man nun durch Verbindung je zweier dieser Ausdrücke neue Gleichungen, und sucht für eine der beiden unbekannten, z. B. (z) Werthe, so erhält man aus

$$15 - y - z = \frac{-10 + y + 2z}{3} \qquad z = \frac{55 - 4y}{5}$$

u. $$\frac{-10 + y + 2z}{3} = \frac{11 + 3y - 2z}{4} \qquad z = \frac{73 + 5y}{14}.$$

Es muß also auch

$$\frac{55 - 4y}{5} = \frac{73 + 5y}{14}$$ sein, woraus

$y = 5$.

z und x findet man wieder durch Substitution.

Elimination: Um z. B. y zu eliminiren, ziehe man die 2te Gleichung von der ersten ab:

$$x + y + z = 15$$
$$2z - 3x + y = 10.$$

$$\overline{- \quad + \quad - \quad -}$$ so erhält man

$$4x - z = 5;$$

eben so eliminire man y aus der 2ten und 3ten,

$$6z - 9x + 3y = 30$$
$$4x - 3y + 2z = 11,$$ so ist hieraus

$$8z - 5x = 41.$$

Eliminirt man nun in den beiden Gleichungen $4x - z = 5$ und $8z - 5x = 41$ die Größe z, so muß die erste Gleichung mit 8 multiplicirt werden:

$$8(4x - z) = 32x - 8z = 40$$

und

$$8z - 5x = 41$$

addirt

$$27x = 81$$

und

$$x = 3.$$

z und y findet man wie oben.

93.

Außer den drei erwähnten Auflösungen verdient noch folgende wegen ihrer bequemen Anwendung bei Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen erwähnt zu werden. Es sei gegeben

I. $3x + 4y = 25$
$3y - 2x = 6.$

Man multiplicirt eine der beiden mit einer willkürlichen Größe m, und addire die andere dazu

$$3mx + 4my = 25m$$
$$3y - 2x = 6$$

so erhält man $(4m + 3)y + (3m - 2)x = 25m + 6.$

Will man nun x oder y eliminiren, so setze man den Coefficienten davon gleich 0, und bestimme hieraus m. Soll hier x eliminirt werden, so ist demnach, wenn $3m - 2 = 0$

$$m = \frac{2}{3}$$

also $(4m + 3)y = 25m + 6$

$$(4 \cdot \frac{2}{3} + 3)y = 25 \times \frac{2}{3} + 6$$

$$\left(\frac{8 + 9}{3}\right)y = \frac{50 + 18}{3}$$

$$17y = 68$$

$$y = 4, \text{ und } x = 5.$$

II. $x + y + 2z = 17$

$2y - x + 3z = 20$

$z + x - y = 4.$

Man multiplicire die erste Gleichung mit m, die zweite mit n, und addire die beiden zur dritten, so erhält man

$mx + my + 2mz = 17m$

$2ny - nx + 3nz = 20n$

$z + x - y = 4$

$$(m - n + 1)x + (m + 2n - 1)y + (2m + 3n + 1)z = 17m + 20n + 4.$$

Um nun y und z zugleich zu entfernen, setze man ihre Coefficienten $(m + 2n - 1)$ und $(2m + 3n + 1) = 0$, so heißt die ganze Gleichung

$$(m - n + 1)x = 17m + 20n + 4$$

$$x = \frac{17m + 20n + 4}{m - n + 1}.$$

Es ist aber $m + 2n - 1 = 0$, oder $m + 2n = 1$

und $2m + 3n + 1 = 0$ » $2m + 3n = -1$;

woraus man durch Multiplication der erstern Gleichung mit 2 erhält:

$2m + 4n = 2$

davon $2m + 3n = -1$

$- \quad - \quad +$

$n = 3$

und $m = -5$;

also $$x = \frac{-85 + 60 + 4}{-5 - 3 + 1} = \frac{-21}{-7} = 3.$$

Wollte man den Werth für y, so wäre $m - n + 1$, und $2m + 3n + 1$ gleich 0 zu setzen, und

$m = -\frac{4}{5}$, $n = \frac{1}{5}$, also

$$(m + 2n - 1)y = 17m + 20n + 4$$

$$(-\frac{4}{5} + \frac{2}{5} - 1)y = -\frac{68}{5} + \frac{20}{5} + 4$$

$$(-4 + 2 - 5)y = -68 + 20 + 20$$

$$-7y = -28$$

$$y = 4.$$

Auf dieselbe Weise würde $z = 5$ gefunden werden.

Beispiele nebst Auflösung.

94.

1. $(x + 3)(y - 2) = (x + 1)(y + 2) - 20.$

$$3x + 12 = 7y - 1.$$

Wird die angezeigte Multiplication in der ersten Gleichung wirklich vollzogen, so erhält man

$$xy - 2x + 3y - 6 = xy + 2x + y + 2 - 20$$

$$2x - y = 6$$

$$7y - 3x = 13.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit 7, so erhält man

$$14x - 7y = 42$$

und da $\underline{7y - 3x = 13}$

$$11x = 55$$

$$x = 5, \text{ und } y = 2x - 6 = 10 - 6 = 4.$$

2. $\frac{m}{n + y} = \frac{n}{3m + x}$

$$mx + 2ny = p.$$

Werden die Brüche weggeschafft, so erhält man

$3m^2 + mx = n^2 + ny$, oder

$mx - ny = n^2 - 3m^2$ und

$mx + 2ny = p$, und wenn in der ersten Gleichung die Zeichen geändert werden:

$$-mx + ny = -n^2 + 3m^2$$

dazu $\underline{mx + 2ny = p}$

$$3ny = 3m^2 - n^2 + p$$

$$y = \frac{3m^2 - n^2 + p}{3n}$$

und $x = \frac{p - 2ny}{m} = \frac{p}{m} - \frac{2n}{m}\left(\frac{3m^2 - n^2 + p}{3n}\right) =$

$$\frac{2n^2 - 6m^2 + p}{3m},$$

3. $x + y = 12$
$x + z = 11$
$y + z = 13.$

Zieht man die zweite von der ersten ab, so ist

$x + y = 12$
$-x - z = -11$

$y - z = 1$, und addirt dazu die dritte

$y + z = 13$, so wird

$2y = 14$
$y = 7$

also $x = 12 - y = 12 - 7 = 5$
und $z = 13 - y = 13 - 7 = 6.$

4. $x + y + z = 21.$
$8y = 7z$
$3z = 4x.$

Aus der dritten Gleichung ist $x = \frac{3z}{4}$,

» » zweiten » » $y = \frac{7z}{8}$;

und daher letztere Werthe in die erste Gleichung substituirt

$$\frac{3z}{4} + \frac{7z}{8} + z = 21$$
$$6z + 7z + 8z = 168$$
$$21z = 168$$
$$z = 8.$$
$$x = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$$
$$y = \frac{7 \cdot 8}{8} = 7.$$

5. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = m.$
$\frac{d}{x} - \frac{f}{y} = n.$

Man setze hier $\frac{1}{x} = p$ und $\frac{1}{y} = q$, so erhält man statt der gegebenen Gleichungen folgende

$$ap + bq = m$$
$$dp - fq = n.$$

Um hiebei q zu eliminiren, setzt man also

$$afp + bfq = fm$$
$$bdp - bfq = bn; \text{ durch Addition}$$
$$(af + bd)p = fm + bn$$
$$p = \frac{fm + bn}{af + bd}$$

$$\text{und } q = \frac{m - ap}{b} = \frac{m}{b} - \frac{a}{b}\left(\frac{fm + bn}{af + bd}\right)$$
$$= \frac{m}{b} - \frac{afm - abn}{abf + b^2d}$$
$$= \frac{amf + bdm - afm - abn}{abf + b^2d}$$
$$= \frac{bdm - abn}{abf + b^2d} = \frac{dm - an}{af + bd}.$$

Es ist aber $\frac{1}{x} = p$, und $\frac{1}{y} = q$; also $\frac{1}{p} = x$, und $\frac{1}{q}$ $= y$, und durch Substitution der gefundenen Werthe von p und q

$$x = \frac{1}{\frac{fm + bn}{af + bd}} = \frac{af + bd}{fm + bn}$$

$$y = \frac{1}{\frac{dm - an}{af + bd}} = \frac{af + bd}{dm - an}.$$

Diese Gleichung könnte man zwar auf jede der obenerwähnten Arten auflösen; jedoch ist die hier gezeigte in den meisten Fällen die kürzeste.

6. $y + x = 5xy$
$2z + 3x = 16xz$
$4z - y = 8yz.$

Man dividire die erste Gleichung mit xy, die zweite mit xz und die dritte mit yz, so ist

$$\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{5xy}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$$

$$\frac{2z}{xz} + \frac{3x}{xz} = \frac{16xz}{xz} = \frac{2}{x} + \frac{3}{z} = 16$$

$$\frac{4z}{yz} - \frac{y}{yz} = \frac{8yz}{yz} = \frac{4}{y} - \frac{1}{z} = 8, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{1}{4}.$$

7. Die so eben aufgelöste Gleichung läßt auch folgende Formen zu:

$$\frac{y + x}{xy} = 5 \qquad \frac{ay \pm bx}{cxy} = m$$

$$\frac{2z + 3x}{xz} = 16 \qquad \frac{dz \pm ex}{fxz} = n$$

$$\frac{4z - y}{yz} = 8 \qquad \frac{gz \pm hy}{pyz} = q$$

und

$$\frac{xy}{y + x} = \frac{1}{5} \qquad \frac{cxy}{ay \pm bx} = r$$

$$\frac{xz}{2z + 3x} = \frac{1}{16} \qquad \frac{fxz}{dz \pm ex} = s$$

$$\frac{yz}{4z - y} = \frac{1}{8} \qquad \frac{pyz}{gz \pm hy} = t.$$

So oft demnach Aufgaben von den beiden im ersten Augenblicke sehr verwickelten Formen, oder ähnlicher Art, vorkommen, bringe man sie auf die unter Nro. 5 und 6 angeführten zurück, und löse sie auf eine der angegebenen Arten auf.

8. $$5x + 2y = 18,3$$

$$4,3y - 0,6x = 13,24.$$

$$x = \frac{18,3 - 2y}{5}$$

$$x = \frac{4,3y - 13,24}{0,6}$$

$$\frac{18,3 - 2y}{5} = \frac{4,3y - 13,24}{0,6}$$

$$10,98 - 1,2y = 21,5y - 66,2$$

$$10,98 + 66,2 = 21,5y + 1,2y$$

$$77{,}18 = 22{,}7y$$

$$y = \frac{77{,}18}{22{,}7} = \frac{7718}{2270} = 3{,}4 \quad \text{und}$$

$$x = \frac{18{,}3 - 6{,}8}{5} = \frac{11{,}5}{5} = \frac{115}{50} = 2{,}3.$$

Daß in ähnlichen Aufgaben den unbekannten Größen unendliche Decimalbrüche als Werthe zukommen können, ist leicht zu erachten.

9. Alle Gleichungen von der Form

$$x^2 - y^2 = a.$$
$$x \pm y = b.$$

lassen sich auf Gleichungen vom ersten Grad zurückbringen, denn aus der zweiten Gleichung ist $x = b \mp y$, welcher Werth in die erste substituirt

$$(b \mp y)^2 - y^2 = a, \text{ oder}$$

$$b^2 \mp 2by + y^2 - y^2 = b^2 \mp 2by = a \text{ gibt,}$$

woraus sich der Werth von y, und durch Substitution auch x finden läßt.

Oder man dividirt die erste Gleichung $x^2 - y^2$ durch $x \pm y$, so erhält man

$$\frac{x^2 - y^2}{x \pm y} = x \mp y = \frac{a}{b}.$$

Man hat demnach

$$x \pm y = b$$
$$x \mp y = \frac{a}{b},$$

aus welchen wieder x und y leicht gefunden werden können.

10. Kommen endlich die unbekannten Größen in allen bisher erwähnten Fällen mit negativen Exponenten vor, so werden selbe nach §. 84. weggebracht, oder die Aufgabe durch Elimination aufgelöst.

Gleichungen mit 4 und mehr unbekannten Größen, habe ich, da sie nur selten vorkommen, und ihre Auflösung nach dem bereits Gesagten nicht schwierig ist, übergangen.

Folgende Beispiele überlasse ich dem Fleiß der Schüler:

1. Aus $\frac{x + 5}{2} + \frac{y + 6}{5} = 6$

$$\frac{5x-1}{2} - \frac{2y-1}{3} = \frac{14}{3},$$

ist $x = 3,\ y = 4.$

2. $$\frac{5x-2y}{3} + \frac{3x-5y}{4} = \frac{67}{12}$$

$$\frac{2y-5x}{3} + \frac{7x-3y}{2} = \frac{85}{6}$$

$x = 15,\ y = 16.$

3. $(x+y) : (x-y) = 11 : 8.$

$3x - 5y = 42$

$x = 19,\ y = 3.$

4. $$\frac{10}{x} = \frac{23}{y}$$

$x + y = 33$

$x = 10,\ y = 23.$

5. $\sqrt{(x+y)} : \sqrt{(x-y-1)} = 9 : 4$

$$\frac{x}{7} + \frac{3y}{4} = 31.$$

$x = 49,\ y = 32.$

6. $$\sqrt{\frac{(x+y)}{4}} : \sqrt{\frac{(y-x)}{2}} = 5 : 3$$

$$\left(\frac{88}{x+3}\right) - \left(\frac{50}{y-9}\right) = \frac{2200}{(x+3)\,(y-9)}$$

$x = 41,\ y = 59.$

7. $$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 26.$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 34.$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 31.$$

$x = 12,\ y = 24,\ z = 48.$

8. $$\frac{3x+7y}{3x+y} = 4$$

$$\frac{3x+7z}{z-3x} = 13$$

$x + y + z = 55$

$x = 5,\ y = 15,$ und $z = 35.$

9. $xy = 12$
$xz = 100.$
$yz = 300$
$x = 2, \quad y = 6, \quad z = 50.$

10. $\sqrt{x} : \sqrt{y} : \sqrt{z} = 5 : 6 : 7$
$x + y + z = 110$
$x = 25, \quad y = 36, \quad z = 49.$

11. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a.$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b$
$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c$
$x = \frac{2}{a+b-c}, \; y = \frac{2}{a-b+c}, \; z = \frac{2}{b+c-a}.$

12. $\frac{2}{x} - \frac{5}{3y} + \frac{1}{z} = 3\frac{4}{27}$
$\frac{1}{4x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 6\frac{11}{72}$
$\frac{5}{6x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 12\frac{1}{36}$
$x = 6, \quad y = 9, \quad z = \frac{1}{3}.$

Practische Beispiele.

1. Zwei Kaufleute A und B hatten zusammen 630 fl. A kaufte sich Staatspapiere, und B Lotterieloose. Nach 10 Jahren hatten beide Kaufleute gleiches Vermögen, aber es zeigte sich, daß A $6\frac{P}{0}$ jährlich gewonnen, und B jährlich $5\frac{P}{0}$ verloren habe. Wie viel Vermögen hatte jeder dieser zwei Kaufleute?

Es sei x das anfängliche Kapital des A, und y das anfängliche des B. Da nun A jährlich $6\frac{P}{0}$ gewonnen, so gewann er mit x fl. offenbar $\frac{6x}{100}$ in einem Jahr, also $10 \cdot \frac{6x}{100} = \frac{3x}{5}$ fl. in 10 Jah=

ren, und A erhielt demnach nach 10 Jahren $x + \frac{3x}{5} = \frac{8x}{5}$ fl. zurück. Weil ferner B von 100 jährlich 5 fl. verlor, so beträgt an y fl. der jährliche Verlust $\frac{5y}{100} = \frac{y}{20}$, also ist der in 10 Jahren erlittene Verlust $\frac{10y}{20} = \frac{y}{2}$, und B erhielt nur $y - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y$ zurück. Der Aufgabe gemäß erhalten wir also die beiden Gleichungen:

1) $x + y = 630$,

2) $\frac{8x}{5} = \frac{y}{2}$, oder $16x = 5y$, woraus

$x = 150$ fl., und $y = 480$ fl.

2. Ein Reisender sagte: „Ich bin durch Deutschland, Frankreich und England gereist, und habe in diesen drei Ländern eine Summe von 8325 Thlr. verzehrt; nemlich: in Deutschland 1520 Thaler, in Frankreich 7540 Livres, und in England 820 Pfund Sterling.“ Als man ihn hierauf nach dem dieser Rechnung zum Grunde liegenden Werth der fremden Geldsorten fragte, gab er zur Antwort, daß 5 Pfund Sterling 3 Thlr. mehr als 108 Franken betragen. Wie hoch hat er jede Münzsorte gerechnet?

Der Livre sei zu x Thlr., und das Pfund Sterling zu y Thlr. gerechnet. Da er nun in Deutschland 1520 Thlr. verzehrt hat, so ist

$7540x + 820y = 8325 - 1520 = 6805$ Thlr. Ferner ist

$5y = 108x + 3$, oder $108x - 5y = -3$,

woraus $x = \frac{1}{4}$ Thlr., $y = 6$ Thlr.

3. Ein Werk soll so gedruckt werden, daß auf jede Seite eine bestimmte Anzahl Zeilen, und in jede Zeile eine bestimmte Anzahl Buchstaben kommen. Wollte man auf die Seite 3 Zeilen mehr, und in die Zeile 4 Buchstaben mehr bringen, so würde sie 224 Buchstaben mehr enthalten, als vorher; wollte man aber auf die Seite 2 Zeilen weniger, und in die Zeile 3 Buchstaben weniger bringen, so würden auf die Seite 145 Buchstaben weniger kommen. Wie viele Zeilen sollten nun auf die Seite, und wie viele Buchstaben in jede Zeile gebracht werden?

Es sei die Anzahl der Zeilen $= x$, und die der Buchstaben in

jeder Zeile = y, so ist die Anzahl der Buchstaben auf jeder Seite = xy. So muß nach der Aufgabe

$$(x + 3)\ (y + 4) = xy + 224, \text{ und}$$
$$(x - 2)\ (y - 3) = xy - 145 \text{ sein, woraus}$$
$$x = 29, \text{ und}$$
$$y = 32.$$

4. Jemand hat zwei Fässer, und in jedem eine gewisse Quantität Wein. Um in beiden gleich viel zu bekommen, gießt er aus dem ersten Fasse so viel in das zweite, als schon darin ist, gießt hierauf wieder aus dem zweiten in das erste so viel als nun darin ist, und endlich wieder aus dem ersten in das zweite so viel, als noch darin übrig ist. Am Ende hat er in jedem Fasse 16 Quart Wein. Wie viele Quart waren anfangs darin?

Anfänglich mögen im ersten Fasse x Quart, und im zweiten y Quart Wein enthalten gewesen sein; so ist, wenn er aus dem ersten Fasse in das zweite so viel gießt, als bereits darin ist, im ersten $x - y$, und im zweiten $2y$ enthalten. Gießt er nun aus dem zweiten in das erste so viel, als nunmehr darin enthalten ist, so ist

im ersten $2(x - y)$, und
im zweiten $2y - (x - y) = 3y - x$

enthalten. Gießt er endlich wieder aus dem ersten in das zweite so viel, als bereits darin ist, so ist

im zweiten $2(3y - y)$, und
im ersten $2(x - y) - (3y - x) = 3x - 5y$.

Da nun zuletzt in beiden Fässern 16 Quart enthalten sein sollen, so ist

I. $3x - 5y = 16$, und
II. $-2x + 6y = 16$,

woraus $y = 10$ Quart im zweiten Fasse, und mithin $x = 22$ Quart im ersten Fasse.

5. Nach Vitruv's Erzählung war die Krone des Königs Hiero von Syrakus 20 Pfund schwer, und verlor im Wasser nahe an $1\frac{1}{4}$ Pfund. Nehmen wir nun an, daß sie blos aus Gold und Silber bestand, und daß 19,64 Pfund Gold im Wasser 1 Pfund, und 10,5 Pfund Silber im Wasser ebenfalls 1 Pfund verlieren, wie viel Gold und wie viel Silber mußte diese Krone enthalten?

Die Mischung enthält x Pfund Gold, und y Pfund Silber.

Es ist daher

$$x + y = 20.$$

Da nun 19,64 Pfund Gold im Wasser 1 Pfund verlieren, so verlieren x Pfund $\frac{x}{19,64}$ Pfund.

Ferner verlieren 10,5 Pfund Silber 1 Pfund, folglich verlieren y Pfund im Wasser $\frac{y}{10,5}$ Pfund. Es verliert demnach die ganze Mischung von x Pfund + y Pfund im Wasser $\frac{x}{19,64} + \frac{y}{10,5}$ Pf.

Diese Mischung verliert nun, nach der Angabe, $1\frac{1}{4}$ Pfund. Es ist daher

$$\frac{x}{19,64} + \frac{y}{10,5} = \frac{5}{4}, \text{ woraus}$$

$$x = 14,77 \ldots, \text{ und } y = 5,22 \ldots$$

6. Drei Personen spielen mit einander. Im ersten Spiele verlor A, aber B und C gewannen so viel, als sie vor dem Spiele hatten. Im zweiten Spiele verlor B, aber A und C gewannen so viel, als sie bei dem Anfange des zweiten Spieles hatten. Im dritten Spiele verlor C an A und B so viel, als jeder der letztern im Anfange des dritten Spieles hatte. Am Ende des dritten Spieles hatte jeder 2 fl.; es fragt sich nun, wie viel Geld ein jeder zum Spiele gebracht habe?

Das anfängliche Geld des Spielers A sei = x, das des Spielers B = y, und endlich das des C = z, so hatte nach dem ersten Spiele

A $x - y - z$,
B $2y$, und
C $2z$.

Nach dem zweiten Spiele hatte

A $2x - 2y - 2z$,
B $2y - (x - y - z) - 2z = 3y - x - z$.

Nach dem dritten Spiele hatte

A $4x - 4y - 4z$,
B $6y - 2x - 2z$,
C $4z - (2x - 2y - 2z) - (3y - x - z)$, oder
$7z - x - y$.

Da nun jeder Spieler gleich viel, nämlich 2 fl. haben soll, so muß

$$1) \quad 4x - 4y - 4z = 120 \text{ kr.}$$
$$2) \quad -2x + 6y - 2z = 120 \text{ kr.}$$
$$3) \quad -x - y + 7z = 120 \text{ kr. sein, woraus}$$
$$x = 195 \text{ kr., oder } 3 \text{ fl. } 15 \text{ kr.}$$
$$y = 105 \text{ kr., oder } 1 \text{ fl. } 45 \text{ kr.}$$
$$z = 60 \text{ kr., oder } 1 \text{ fl.}$$

Gleichungen des zweiten Grades
(quadratische)
a) mit einer unbekannten.

95.

Was eine quadratische Gleichung sei, ist §. 82. gesagt worden. Nach vorhergegangener Reduction lassen sich sämmtliche quadratische Gleichungen auf die Formen

$$x^2 \pm b = 0 \qquad \text{(für die reinen)}$$
$$x^2 + bx + c = 0 \quad \text{(für die unreinen)}$$

zurück bringen.

Daß die Auflösung derselben, d. i. das Finden des Werthes für die unbekannte in der ersten Potenz durch Ausziehung der Quadratwurzel geschehen muß, ist aus der Form ersichtlich.

Man wird daher jede rein quadratische Gleichung dadurch auflösen, daß man das Quadrat der unbekannten Größe ganz allein, und positiv herzustellen sucht, und dann auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel auszieht.

$$x^2 = \mp b$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\mp b}$$
$$x = \pm\sqrt{\mp b}.$$

Da nemlich die Quadratwurzel aus jeder Größe positiv und negativ sein kann, so ergeben sich für jede rein quadratische Gleichung 2 gleiche, aber entgegengesetzte Werthe der unbekannten. Nach der verschiedenen Beschaffenheit des Ausdruckes $\sqrt{\mp b}$ ist der Werth von x rational, irrational oder imaginär. z. B.

$$x^2 + 15 = 159$$
$$x^2 = 144$$
$$x = \sqrt{144} = \pm 12$$

$x^2 + 10 = 50$

$x^2 = 40$

$x = \sqrt{40} = \pm 6{,}3245 \ldots$

$x^2 + 50 = 14$

$x^2 = -36$

$x = \sqrt{-36} = \pm 6\sqrt{-1}.$

Werden in allen diesen Fällen die Wurzeln auf 0 reduzirt, und mit einander multiplicirt, so erhält man stets die gegebene Gleichung

$(x - 12)(x + 12) = x^2 - 144 = 0$, oder $x^2 = 144$

$(x - \sqrt{40})(x + \sqrt{40}) = x^2 - 40 = 0$, oder $x^2 = 40$

$(x - \sqrt{-36})(x + \sqrt{-36} = x^2 + 36 = 0$, oder $x^2 = -36$.

96.

Jede unreine oder vollständige quadratische Gleichung läßt sich in eine reine umwandeln, deren Auflösung so eben gegeben wurde. Setzt man in der allgemeinen Form derselben

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$x = y - \frac{b}{2}$$

nemlich gleich einer andern unbekannten weniger dem halben Coeffizienten des zweiten Gliedes, so ist

$$x^2 + bx + c = y^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0, \text{ woraus}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}}, \text{ und daher}$$

$$x = y - \frac{b}{2} = \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \text{ (nemlich}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \text{ und}$$

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2},$$

welche man Wurzelgleichungen nennt), abermal 2 Werthe für die unbekannte.

Jede quadratische Gleichung läßt sich demnach in eine andere umwandeln, deren Werth um *ein* bestimmtes größer oder kleiner ist.

Soll aus $x^2 + 3x = 28$ eine Gleichung gebildet werden, daß der Werth der unbekannten um 4 größer ist, so setze man

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$
$$x + 4 = y, \text{ und}$$
$$x = y - 4, \text{ so ist}$$
$$x^2 = y^2 - 8y + 16$$
$$+ 3x = 3y - 12$$
$$- 28 = - 28$$

$$0 = y^2 - 5y - 24, \text{ oder}$$
$$y^2 - 5y = 24.$$

Soll die Wurzel kleiner werden, so muß der vermindernde Theil negativ beigesetzt werden.

97.

Soll aber eine unreine quadratische Gleichung ohne diese vorhergegangene Reduction auf eine reine, unmittelbar aus der allgemeinen Form aufgelöst werden, so verwandle man

$$x^2 + bx + c = 0 \text{ in}$$
$$x^2 + bx = - c.$$

Man sieht sogleich, daß x durch unmittelbare Ausziehung der Wurzel nicht gefunden werden kann, da $x^2 + bx$ (als zweitheilige Größe) kein vollständiges Quadrat ist. Zugleich aber hat der Ausdruck $x^2 + bx$ sehr viel Aehnlichkeit mit dem Quadrat einer zweitheiligen Größe $\left(x + \frac{b}{2}\right)$, welches $x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$ gibt. Es wird demnach obiger Ausdruck durch Addition von $\frac{b^2}{4}$ d. h. des Quadrates des halben Coeffizienten von x vervollständigt.

Wird daher $\frac{b^2}{4}$ beiderseits addirt, so erhält man

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = - c + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2 - 4c}{4},$$

und zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus

$$x + \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$x = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \text{ wie oben.}$$

Aus der Gleichung $x^2 - 4x = 12$, findet man

$$x^2 - 4x + (-2)^2 = 12 + (-2)^2$$
$$x^2 - 4x + 4 = 12 + 4 = 16 \text{ und } \surd$$
$$x - 2 = \pm 4$$
$$x = 2 \pm 4 = +6, \text{ oder } -2,$$

welches Verfahren also auf jede qaudratische Gleichung nach vorhergegangener Reduction angewendet werden kann.

$3x^2 - 2x - 65 = 0$, oder

$x^2 - \frac{2x}{3} = \frac{65}{3}$, wird

$$x^2 - \frac{2x}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{65}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2$$
$$x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} = \frac{65}{3} + \frac{1}{9} = \frac{196}{9},$$

und wenn man die Quadratwurzel auszieht

$$x - \frac{1}{3} = \pm \surd\frac{196}{9} = \pm \frac{14}{3}$$
$$x = \frac{1}{3} \pm \frac{14}{3} = +\frac{15}{3} = 5, \text{ oder } -\frac{13}{3} = -4\frac{1}{3}.$$

Alle Gleichungen, welche nach gehöriger Reduction im 2ten Glied einen Bruch als Coefficient bei sich führen, das 3te Glied mag beschaffen sein, wie es wolle, lassen auch folgende Auflösung zu. z. B.

$$x^2 - \frac{7x}{3} = \frac{40}{3}.$$

Man multiplicire die ganze Gleichung mit dem 4fachen Quadrate des Nenners des 2ten Gliedes (also hier $4 \times 3^2 = 36$), so erhält man

$36x^2 - 84x = 480$, und durch Ergänzung

$$36x^2 - 84x + (-7)^2 = 480 + (-7)^2 \text{ *)}$$
$$36x^2 - 84x + 49 = 480 + 49 = 529, \text{ und } \surd$$
$$6x - 7 = \pm 23$$
$$x = \frac{\pm 23 + 7}{6} = +\frac{30}{6} = 5, \text{ oder } -\frac{16}{6} = -2\frac{2}{3}$$

---

*) Die Ergänzung 7 wird gefunden, wenn man mit der doppelten Quadratwurzel des Coeffizienten des 1sten Gliedes in den 2ten Coeff. dividirt.

Ist der Zähler des Coeffizienten von x eine gerade Zahl, so reicht die Multiplication mit dem Quadrat des Nenners hin.

$x^2 - 2x + 10 = 0.$
$x^2 - 2x = -10$ ergänzt
$x^2 - 2x + (-1)^2 = -10 + 1 = -9.$
$x - 1 = \pm\sqrt{-9} = \pm 3\sqrt{-1}.$
$x = 1 \pm 3\sqrt{-1}$ d. h. imaginär,

was allzeit eintritt, wenn in einer auf 0 reducirten quadratischen Gleichung das 3te Glied positiv und größer ist, als der 4te Theil des Quadrates vom Coeffizient des 2ten Gliedes.

Die imaginären Wurzeln sind immer paarweise vorhanden.

Von der Richtigkeit des Verfahrens bei der Auflösung einer quadratischen Gleichung, überzeugt man sich wieder durch Substitution der gefundenen Werthe in die Gleichung, so sind aus $x^2 - 4x = 12$ die Werthe $+6$ und -2 gefunden worden, und es ist auch

$6^2 - 4 \cdot 6 = 12$, so wie
$(-2)^2 - (4 \times -2) = 12.$

Desgleichen für

$x^2 - 2x + 10 = 0$ $x = 1 \pm 3\sqrt{-1}.$
$(1 + 3\sqrt{-1})^2 - 2 \cdot (1 + 3\sqrt{-1}) + 10 = 0$, und
$(1 - 3\sqrt{-1})^2 - 2 \cdot (1 - 3\sqrt{-1}) + 10 = 0.$ (§. 58.)

98.

Um die Natur der quadratischen Gleichungen näher kennen zu lernen, betrachte man folgende Gleichungen nebst Auflösungen und Eigenschaften:

	Angabe.	Wurzeln.		Summe der Wurzeln mit verändertem Zeichen.	Produkt der Wurzeln.	Allgemeine Eigenschaft.
1.	$x^2 + x - 12 = 0$	$+3$	und -4	$+1$	-12	Die auf 0 reducirten Wurzelgleichungen geben miteinander multiplicirt, stets die Angabe.
2.	$x^2 - 5x + 6 = 0$	$+3$	„ $+2$	-5	$+6$	
3.	$x^2 - 5x - 6 = 0$	$+6$	„ -1	-5	-6	
4.	$x^2 + 9x + 20 = 0$	-4	„ -5	$+9$	$+20$	
5.	$x^2 + 2x + 30 = 0$	$-1+\sqrt{-29}$	„ $-1-\sqrt{-29}$	$+2$	$+30$	
6.	$x^2 - 7\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4} = 0$	$+6\frac{1}{2}$	„ $\frac{1}{2}$	-7	$+3\frac{1}{4}$	
7.	$x^2 - 8x - 14 = 0$	$4+\sqrt{30}$	„ $4-\sqrt{30}$	-8	-14	

(Obwohl alle diese Eigenschaften allgemein gültig sind, so habe ich doch der Deutlichkeit wegen den Literalgleichungen numerische vorgezogen).

Hieraus folgen nach verschiedener Beschaffenheit der Gleichung folgende unveränderliche Eigenschaften:

a) Jede quadratische Gleichung hat 2 Werthe, welche auf 0 reducirt und miteinander multiplicirt, die Gleichung wieder geben. Wenn aber z. B. in einer Gleichung (wie I.) für $x = +3$, und -4 als Wurzeln erscheinen, so ist dies nicht so zu verstehen, daß x zugleich $+3$ und -4 sei, weil sonst auch $+3 = -4$ sein müßte. Es ist hier x nur der allgemeine Stellvertreter der gesuchten Größe, und kann als solcher verschiedene Werthe bezeichnen.

b) Der Coeffizient des 2ten Gliedes ist allzeit gleich der Summe der Wurzeln mit verändertem Zeichen.

c) Das letzte Glied ist das Product der beiden Wurzeln.

d) So oft in den 3 Gliedern 2 gleiche Zeichen, (was man eine Folge der Zeichen nennt), nacheinander kommen, so oft ist eine Wurzel negativ, so oft ungleiche Zeichen einander folgen, (was Wechsel der Zeichen heißt), ist eine

positive Wurzel vorhanden. Beide Wurzeln sind daher gleich, wenn das letzte Glied positiv, ungleich, wenn selbes negativ ist.

e) Jede Gleichung, deren 3tes Glied mit verändertem Zeichen, + dem Quadrate des halben Coefficienten des 2ten Gliedes eine positive Summe geben, hat mögliche Wurzeln, und ist der genannte Ausdruck ein reines Quadrat, so sind beide Wurzeln rational, sonst irrational.

f) Wenn der Coefficient des 2ten Gliedes, und das 3te Glied ganze Zahlen sind, so sind auch die Wurzeln ganze Zahlen, wenn sie rational sind, ist aber das 3te Glied eine gebrochene Zahl, und der Coefficient des 2ten eine ganze, so gehen gebrochene (rationale) Wurzeln hervor.

g) Ist endlich das 3te Glied positiv, und größer als das Quadrat vom $\frac{1}{2}$ Coefficient des 2ten Gliedes, so sind die Wurzeln imaginär. Selbe sind immer paarweise vorhanden. Für Gleichungen mit imaginären Wurzeln, fallen auch die Bestimmungen der Zeichen weg.

99.

Jede quadratische Gleichung ist nach §. 98. a ein Product aus 2 Faktoren. z. B.

$$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1).$$

Man kann sich daher immer eine quadratische Gleichung bilden, deren Werthe bestimmte Größen sein sollen. Will man eine Gleichung, deren Werthe $+5$ und -4, d. i. $x = +5$, und $x = -4$ sein sollen, so reducire man beide Werthe auf 0, und multiplicire selbe miteinander, so erhält man

$$(x - 5)(x + 4) = x^2 - x - 20 = 0, \text{ oder}$$
$$x^2 - x = 20.$$

Ferner ergibt sich aus §. 98. c eine Auflösungsmethode; da nemlich das letzte Glied das Product der beiden Wurzeln ist, so darf man nur dasselbe in seine Faktoren zerlegen, und diese nach und nach positiv und negativ in die Gleichung substituiren, bis einer gefunden wird, der der Gleichung Genüge leistet, so hat man eine Wurzel der Gleichung, und wenn man mit dieser in das letzte Glied der Gleichung dividirt, die 2te.

Allenfallsige Brüche müssen aber hiebei aus der Gleichung entfernt, so wie die ganze Gleichung auf 0 reducirt werden. Auch ver-

steht sich von selbst, daß nur Gleichungen mit rationalen Wurzeln diese Auflösung zulassen, z. B.

$x^2 - 6x = 16$, oder $x^2 - 6x - 16 = 0$; die Faktoren von -16 sind $\pm (1, 2, 4, 8, 16)$, von denen $+8$ die Gleichung auflöst, daher die andere Wurzel $\frac{-16}{+8} = -2$, und wirklich ist

$(x - 8)(x + 2) = x^2 - 6x - 16$.

Soll eine quadratische Gleichung, welche Brüche enthält, von denselben befreit, und doch das Quadrat der unbekannten ohne Coefficient erscheinen, so geschieht dieß auf folgende Weise. z. B.:

$$x^2 - \frac{7x}{6} + \frac{1}{3} = 0.$$

Man setze x einer andern unbekannten Größe (z. B. z), dividirt durch den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend der vorhandenen Nenner, gleich, also hier $= \frac{z}{6}$, bilde nun die ganze Gleichung nach, und multiplicire die neue in allen Gliedern mit dem ersten Nenner.

Da $x^2 = \frac{z^2}{36}$, $\frac{-7x}{6} = \frac{-7z}{36}$, so heißt die neue Gleichung $\frac{z^2}{36} - \frac{7z}{36} + \frac{1}{3}$, und $\times 36$. $z^2 - 7z + 12 = 0$; aus welcher Gleichung $z = 4$, und $z = 3$ gefunden wird, folglich $x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; oder $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

100.

Die Gleichung $x^2 - 12x + 36 = 0$ hat 6 als Wurzel, und da $\frac{+36}{+6}$ abermal $+6$ ist, so sind also hier beide Wurzeln gleich, und die Gleichung ist aus den gleichen Faktoren $(x - 6)(x - 6) = x^2 - 12x + 36$ entstanden. Löst man diese Gleichung nach §. 97 auf, so erhält man

$x^2 - 12x + (-6)^2 = -36 + 36 = 0$, und $\sqrt{}$

$x - 6 = \pm\sqrt{0} = 0$, also $x = 6$, so daß man gegen die obige Behauptung glauben möchte, diese quadratische Gleichung habe nur einen Werth. Durch Division mit $x - 6$ in $x^2 - 12x + 36$ erhält man aber $x - 6$, so daß sie ebenfalls aus 2 (hier gleichen)

Faktorn besteht, so wie von ihr auch alle §. 98 aufgestellten Regeln gelten Dieser Fall tritt überall ein, wo das dritte Glied das Quadrat vom halben Coefficient des zweiten ist, z. B.

$$\frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{2ax}{c} + \frac{b^2}{c^2} = 0$$

wird $x^2 - \frac{2b^2x}{ac} = \frac{-b^4}{a^2c^2}$

und $x^2 - \frac{2b^2x}{ac} + \frac{b^4}{a^2c^2} = \frac{-b^4}{a^2c^2} + \frac{b^4}{a^2c^2} = 0$ und $\sqrt{\ }$

$x - \frac{b^2}{ac} = 0$, oder $x = \frac{b^2}{ac}$.

Beispiele.

Aus $3x^2 - 3 = 291 - 3x^2$ ist $x = \pm 7$.

$\frac{ax^2 - m}{\sqrt{(x^2 - b)}} = \sqrt{x^2 - b}$ » $x = \pm \sqrt{\frac{m - b}{a - 1}}$.

$3x^2 - 12x + 1858 = (2x - 3)^2$ » $x = \pm 43$.

$\sqrt{\frac{125}{x^2} + 20} - \sqrt{\frac{125}{x^2} - 5} = 5$ » $x = \pm 5$.

$\sqrt{(x^2 - 25)} : \sqrt{(x^2 + 27)} = 6 : 7$ » $x = \pm 13$.

$\frac{\sqrt{(368 + 4x^2)} + 2x}{\sqrt{(368 + 4x^2)} - 2x} = 23$ » $x = \pm 22$.

$\frac{3m + 2x}{m} = \frac{3x + 50m}{x}$ » $x = \pm 5m$.

$3x^2 - 8x = -4$ » $x = \begin{cases} 2 \\ \frac{2}{3}. \end{cases}$

$\frac{35}{x} - \left(\frac{952 - 10x}{3x^2}\right) = -1$ » $x = \begin{cases} 7 \\ -45\frac{1}{3}. \end{cases}$

$\frac{5}{x + 3} + \frac{3}{x - 4} = \frac{17}{24}$ » $x = \begin{cases} 12 \\ \frac{5}{17}. \end{cases}$

$x^2 - 6x = -10$ » $x = \begin{cases} 3 + \sqrt{-1} \\ 3 - \sqrt{-1}. \end{cases}$

$adx - acx^2 = bcx - bd$ ist $x = \left\{ \begin{matrix} \frac{d}{c} \\ -\frac{b}{a}. \end{matrix} \right.$

$\frac{x}{\sqrt{x}} + 3 = \frac{x}{4}$ » $x = \left\{ \begin{matrix} 36 \\ 4 \end{matrix} \right.$

$\frac{24}{x} + x(y-1) - 2(y-1) = \frac{24y}{x}$ » $x = \left\{ \begin{matrix} 6 \\ -4. \end{matrix} \right.$

$\frac{(x-60)^2 \cdot 25}{4(1+x)+x^2} = 4(1-x) + x^2$ » $x = \left\{ \begin{matrix} \frac{-5+\sqrt{1241}}{2} \\ \frac{-5-\sqrt{1241}}{2}. \end{matrix} \right.$

$cx^2 - 2cx\sqrt{d} = dx^2 - cd$ » $x = \left\{ \begin{matrix} \frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}} \\ \frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}. \end{matrix} \right.$

101.

So wie jede quadratische Gleichung ein Produkt zweier Faktoren ist, so ist jede Gleichung vom 3, 4, 5 ... nten Grad ein Produkt von 3, 4, 5 ... n Faktoren, und hat demnach eben so viele Wurzeln, als der höchste Exponent der unbekannten ist; endlich ist das letzte Glied ebenfalls das Produkt aller Wurzeln. Jede reine höhere Gleichung aber wird dadurch aufgelöst, daß man, wenn die Gleichung geordnet ist, beiderseits jene Wurzel auszieht, die die unbekannte in der ersten Potenz hervorbringt, z. B. $2x^3 + 12 = 76 + x^3 = x^3 - 64 = 0$, oder $x^3 = 64$ und $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{64}$, woraus $x = 4$. Da aber die Gleichung drei Wurzeln hat, so theile man mit $x - 4$ in $x^3 - 64$, so erhält man $x^2 + 4x + 16 = 0$, deren Wurzeln $-2 \pm \sqrt{-12}$ sind, so daß also $x - 4$, $x + 2 - \sqrt{-12}$ und $x + 2 + \sqrt{-12}$ die drei Wurzelgleichungen sind, deren Produkt wirklich $x^3 - 64$ ist.

Allgemein also ist aus $x^m = a$, $x = \sqrt[m]{a}$, und zwar $\pm \sqrt[m]{a}$, wenn m eine gerade Zahl ist, und für ein negatives a die Wurzeln imaginär.

Ist m ungerade, so erhält die Wurzel das Zeichen von a.

Ist der Exponent von $x > 3$, oder eine gebrochene positive oder negative Zahl, so geschieht die Auflösung sehr leicht mit Hilfe der Logarithmen, denn für

$x^m = c$ erhält man

$m \log. x = \log. c$

und $\log. x = \frac{\log. c}{m}$, es mag m positiv oder negativ, ganz oder gebrochen sein.

In jeder unreinen höhern Gleichung aber suche man, um die allenfallsigen rationalen Wurzeln zu erhalten, die Faktoren des letzten Gliedes, und substituire selbe in die Gleichung, bis einer gefunden wird, der der Gleichung Genüge leistet. Setzt man diese Wurzel mit dem entgegengesetzten Zeichen zur unbekannten, und dividirt in die gegebene Gleichung, so erhält man eine Gleichung um 1 Grad niedriger, welche nun wieder so behandelt wird, und so fort, bis man auf eine quadratische Gleichung kommt, deren Auflösung nun bekannt ist. Multiplicirt man nun alle auf 0 reducirten Werthe der Gleichung mit einander, so erhält man die gegebene Gleichung. z. B.

$$x^3 - 6x^2 + 11x = 6.$$

Substituirt man in diese Gleichung $\pm (1, 2, 3, 6)$, so findet man, daß 1 eine Wurzel der Gleichung sei, und dividirt man selbe, auf 0 reducirt, durch $x - 1$, so erhält man $x^2 - 5x + 6 = 0$, deren Werthe $x = \left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\}$ sind, daher die 3 Wurzeln der Gleichung 1, 2 und 3, und $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Kommen in einer reducirten höhern Gleichung Brüche vor, so werden diese wieder nach §. 99. zuerst weggeschafft. z. B.

$$x^3 - \frac{11x^2}{6} + x - \frac{1}{6} = 0.$$

Setzt man $x = \frac{z}{6}$, so erhält man

$$\frac{z^3}{216} - \frac{11z^2}{216} + \frac{z}{6} - \frac{1}{6} = 0, \text{ und } \times 216$$

$$z^3 - 11z^2 + 36z - 36 = 0;$$

deren Wurzeln 2, 3, 6 sind, daher

$$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \text{ oder } \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \text{ oder } \frac{6}{6} = 1.$$

Jede vollständige höhere Gleichung hat folgende Eigenschaften:

1) Sie hat so viele Wurzeln, als der höchste Exponent der unbekannten anzeigt.

2) Der Coefficient des zweiten Gliedes ist gleich der Summe der Wurzeln mit entgegengesetztem Zeichen, der Coefficient des dritten Gliedes ist gleich der Summe der Produkte aus je 2, der des 4ten aus je 3 ꝛc., das letzte Glied endlich ist das Produkt aller Wurzeln.

3) Wenn die Gleichung keine unmöglichen Wurzeln enthält, so hat sie so viele positive Wurzeln, als Wechsel der Zeichen, und so viel negative, als Folgen der Zeichen vorkommen.

4) Die unmöglichen Wurzeln sind stets in gerader Anzahl vorhanden, daher jede höhere Gleichung, deren höchster Exponent ungerade ist, wenigstens eine mögliche Wurzel hat.

Beispiele.

Für $x^3 - 49x - 120 = 0$ erhält man $-3, -5, +8$.

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ erhält man $1, 2, 3, 4$.

$x^3 - \frac{14x^2}{3} + 7x - \frac{10}{3} = 0$ » » $1, \frac{5}{3}, 2$.

$x^4 - \frac{19x^3}{4} + \frac{49x^2}{8} - \frac{11x}{4} + \frac{3}{8} = 0$ » » $1, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

$\frac{x^5}{5} - x^4 - \frac{13x^3}{5} + 13x^2 + \frac{36x}{5} - 36 = 0$ » » $2, -2, 3, -3, 5$.

$\frac{x^6}{2} - 13x^4 + \frac{169x^2}{2} - 72 = 0.$ $1, -1, 3, -3, 4, -4$.

102.

Alle höheren Gleichungen von der Form $x^{2m} + px^m = q$, in welchen nemlich der Exponent der unbekannten des ersten Gliedes das Doppelte des Exponenten von x im 2ten Gliede ist, m mag was immer für eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein, lassen sich, wie quadratische Gleichungen, auflösen.

Setzt man nemlich in $x^{2m} + px^m = q$, $x^m = z$, so wird

$x^{2m} + px^m = z^2 + pz = q$, und

$z^2 + pz + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4} = \frac{4q + p^2}{4}$, und $\sqrt{\quad}$

$z + \frac{p}{2} = \pm \frac{\sqrt{4q + p^2}}{2}$.

$z = \frac{-p \pm \sqrt{4q + p^2}}{2}$, da aber $z = x^m$, so ist

$$x = \sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{\frac{-p \pm \sqrt{4q + p^2}}{2}}.$$

$\sqrt[5]{x^4} - 3\sqrt[5]{x^2} = 54$, oder $x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} = 54$.

Nimmt man für $x^{\frac{2}{3}} = y$, so erhält man $y^2 - 3y = 54$, woraus $y = \begin{cases} 9 \\ -6 \end{cases}$, also $x^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} 9 \\ -6 \end{cases}$, und $x = \begin{cases} \pm 27 \\ \pm 6\sqrt{-6}. \end{cases}$

$x^5 - 20x^2\sqrt{x} = 384$, $x^5 - 20x^{\frac{5}{2}} = 384$ und für $x^{\frac{5}{2}} = m$.

$m^2 - 20m = 384$, woraus $m = \begin{cases} 32 \\ -12 \end{cases}$, und daher $x = \begin{cases} 4 \\ \sqrt[5]{144}. \end{cases}$

Dasselbe Verfahren wird auch mit Vortheil angewendet, wenn zwei Glieder der Gleichung gleiche zusammengesetzte Ausdrücke sind, und mit Exponenten versehen, deren einer die Hälfte des andern ist. z. B.

$$(x^2 + 15x) - \sqrt{(x^2 + 15x)} = 90.$$

Setzt man hier $\sqrt{(x^2 + 15x)} = z$, so erhält man $z^2 - z = 90$,

woraus $z = \begin{cases} 10 \\ -9 \end{cases}$, also $\sqrt{(x^2 + 15x)} = \begin{cases} 10 \\ -9. \end{cases}$

oder $x^2 + 15x = 100$, woraus $x = \begin{cases} 5 \\ -20 \end{cases}$

und $x^2 + 15x = 81$ » $x = \frac{-15 \pm \sqrt{549}}{2}$.

Eben so erhält man aus:

$\sqrt{(2x^2 + 17)} - \sqrt{(x^2 - 7)} = 4$, $x = \pm 4$ und $\pm 4\sqrt{2}$.

$3x^6 + 42x^3 = 3321$, $x = \begin{cases} 3 \\ -\sqrt[3]{41}. \end{cases}$

$(x^2 - 2x + 5) - \sqrt{(x^2 - 2x + 1)} = 34$ ist einerlei mit $(x^2 - 2x + 1) - \sqrt{(x^2 - 2x + 1)} = 30$, woraus

$x = \begin{cases} 7 \\ -5 \end{cases}$ und $x = \begin{cases} 6 \\ -4. \end{cases}$

Praktische Beispiele.

1. Einige Kaufleute schicken zur Errichtung einer Handlung einen Geschäftsführer ab. Jeder von diesen Kaufleuten gibt hiezu

zehnmal so viel Gulden, als es Personen sind. Der Geschäftsführer gewinnt mit jedem 100 fl. zweimal so viel, als es Personen sind. Wenn man nun $\frac{1}{100}$ des ganzen Gewinnes mit $2\frac{2}{9}$ multiplicirt, so kommt die Zahl der Kaufleute heraus. Wie viel sind ihrer gewesen?

Die Anzahl der Kaufleute sei $= x$, und da ein jeder $10x$ Gulden eingelegt hat, so war das ganze Kapital $= 10x^2$ fl. Nun gewinnt der Geschäftsführer mit 100 fl. $2x$ fl., folglich gewinnt er $\frac{1}{5}x^3$ mit dem ganzen Kapital $10x^2$. Der $\frac{1}{100}$ Theil dieses Gewinnes ist daher $\frac{1}{500}x^3$, welcher mit $2\frac{2}{9}$, d. i. mit $\frac{20}{9}$ multiplicirt, $\frac{20}{4500}x^3$, oder $\frac{1}{225}x^3$ gibt, welches der Zahl x gleich sein muß. Daher hat man diese Gleichung

$$\frac{1}{225}x^3 = x, \text{ oder } x^3 = 225x, \text{ oder}$$

$$x^2 = 225; \text{ woraus } x = \sqrt{225} = \pm 15.$$

Es sind daher in allem 15 Kaufleute gewesen, und ein jeder hat 150 fl. eingelegt.

Anmerkung. Dieser, so wie vielen andern Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen, leistet nur ein Werth der unbekannten Genüge, wo also die andere Wurzel der Gleichung als unstatthaft verworfen werden muß, während andere doch beide Werthe zulassen. Allein in solchen Fällen zeigt der Umstand, wenn die Bedingungen der Aufgabe, durch algebraische Ausdrücke dargestellt, eine Gleichung vom 2ten Grade hervorbringen, immer an, daß die Aufgabe, deren Bedingungen auch einer der beiden Werthe widerspricht, bei angemessen veränderten Bedingungen zwei Auflösungen zulasse.

Wenn auch die Anwendung des einen Werthes auf die Aufgabe auf Widersprüche führen sollte, so leisten sie doch den algebraischen Formeln Genüge, daher die algebraische Auflösung über die Aufgabe erhaben ist, indem selbe alle möglichen Fälle, sie mögen in letzterer vorkommen oder nicht, in sich begreift.

2. Es verkauft jemand eine Uhr um 144 Gulden, und gewinnt daran so viel Prozente, als ihn die Uhr gekostet hat, wie theuer hatte er die Uhr gekauft? Die Uhr habe x fl. gekostet, so ist das,

was beim Verkauf gewonnen wird, (144 — x) fl. Da dieß nun x Prozente ausmacht, so ist $100 : x = x : (144 - x)$ folglich

$$x^2 = 100 \cdot (144 - x) = 14400 - 100x;$$

ferner $x^2 + 100x = 14400$.

Woraus x entweder = 80, oder = — 180. Auch hier gilt nur der erstere Werth.

3. Ein Garten ist 1190 Quadratruthen groß, und dessen Breite eine Ruthe weniger als die Länge; wie lang und breit ist er?

Die Länge des Gartens sei = x, so ist die Breite = x — 1, und der Flächeninhalt = x(x — 1). Es ist also $x(x - 1) = 1190$,

oder $x^2 - x = 1190$, woraus

$x = 35$, oder $- 34$.

Das letztere gilt hier wieder nicht, also die Länge 35 Ruthen, und die Breite = x — 1 = 34 Ruthen.

4. Jemand kauft einige Bücher für 180 fl. Wären der Bücher für eben das Geld 3 mehr gewesen, so wäre ihm ein Buch um 3 fl. wohlfeiler gekommen. Wie viel sind es Bücher gewesen?

Es seien x Bücher gewesen, so hat das Buch $\frac{180}{x}$ fl. gekostet. Hätte er aber x + 3 Bücher für 180 fl. bekommen, so würde eines $\frac{180}{x+3}$ fl. gekostet haben, welcher Preis um 3 fl. weniger ist, als der wirkliche, woraus diese Gleichung entsteht

$$\frac{180}{x+3} = \frac{180}{x} - 3.$$

woraus x = 12 und — 15, von welchen + 12 der Aufgabe Genüge leistet. Also sind 12 Bücher für 180 fl. gekauft worden, daher eins 15 fl. gekostet hat. Hätte man aber 3 Bücher mehr, nemlich 15 Bücher für 180 fl. bekommen, so würde 1 Buch 12 fl., folglich 3 fl. weniger gekostet haben.

5. Die Tiefe einer Grube, aus der Zeit zu finden, welche zwischen dem Augenblick, da man einen Stein in dieselbe fallen läßt, und dem Augenblick, da man den Schall des auf den Boden schlagenden Steins hört, verstreicht. Der Widerstand, welchen die Luft dem fallenden Steine leistet, wird hier bei Seite gesetzt?

Nennt man die Zeit, welche der Stein zum Herabfallen braucht, x, und die ganze verflossene Zeit (in Sekunden ausgedrückt) z, so ist

jene, welche der Schall heraufzukommen nöthig hat, $z - x$. Wenn nun der Raum, durch welchen ein Körper in der ersten Sekunde fällt, m, und der, welchen der Schall in einer Sekunde durchläuft, n Fuß ist, so ist nach physikalischen Gesetzen der Raum, durch welchen der Stein in x Sekunden fällt, mx^2, und der, durch welchen der Schall in $z - x$ Sekunden geht $= (z - x)n$. Da nun beide Räume einander nothwendig gleich sind, so ist

$$mx^2 = (z - x)n, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{-n + \sqrt{4nmz + n^2}}{2m}.$$

Bei Auflösung der hieher gehörigen Aufgaben ist aber m, d. h. der Fallraum in der ersten Sekunde $= 15$ Fuß, und n, d. i. der vom Schall in jeder Sekunde zurückgelegte Weg $= 1050$ Fuß. Es wäre demnach für $z = 5$.

$$x = \frac{-1050 + \sqrt{1417500}}{30} = 4{,}68\ldots$$

folglich die Tiefe $= x^2m = 4{,}68^2 \cdot 15 = 328{,}5\ldots$ Fuß.

b) mit mehreren unbekannten.

103.

Eine Aufgabe mit zwei unbekannten heißt vom 2ten Grad, wenn, nachdem die eine der unbekannten weggeschafft wurde, die hiedurch erhaltene Gleichung vom 2ten Grade ist.

Es können daher nach Beschaffenheit der einzelnen Gleichungen beide unbekannten in der ersten, eine oder beide in der zweiten Potenz vorkommen. Beide letzteren Fälle führen jedoch sehr oft auf höhere Gleichungen.

Die Entfernung einer unbekannten geschieht dabei meistens durch Substitution, seltner durch Comparation und Elimination.

Welche der erwähnten Verfahrungsarten in jedem besondern Falle die zweckmäßigste sei, ist aus der Beschaffenheit der Aufgabe zu entnehmen. Auch werden nicht selten andere früher erwiesene mathematische Sätze mit Vortheil dabei angewendet, wie aus nachstehenden Beispielen abgenommen werden kann. Zugleich folgt die Auflösung einiger Aufgaben, welche, obwohl von höhern Graden, sich mit An-

wendung specieller Vortheile entweder auf einfache oder quadratische, oder reine höhere Gleichungen zurückbringen lassen.

Ein Fall, wie eine Aufgabe mit zwei unbekannten in der 2ten Potenz, als einfache Gleichung behandelt werden könne, ist §. 94. 9. gegeben. Daß die Auflösung der Gleichungen 2ten Grades mit drei und mehreren unbekannten auf dieselbe Art wie §. 90—92 geschehe, bedarf kaum einer Erwähnung.

Praktische Beispiele.

1. Wie heißen die beiden Zahlen, deren Summe 12 und Produkt 32 ist?

$$x + y = 12$$
$$xy = 32.$$

Aus der ersten Gleichung ist $x = 12 - y$, also $xy = (12 - y)y = 12y - y^2 = 32$, oder

$$y^2 - 12y = -32.$$
$$y^2 - 12y + 36 = -32 + 36 = 4.$$
$$y - 6 = \pm 2 = +8, \text{ oder } +4$$

und $x = 12 - y = 12 - 8 = 4$, oder

$$12 - 4 = 8.$$

Es sind demnach die Werthe für x und y zwar einander gleich, doch so, daß der 2te Werth von x den 1sten von y, und umgekehrt fodert; daher man nicht sagen darf, daß x und y gleich seien.

Aehnliche Fälle, nemlich das Erscheinen gleicher Werthe für die unbekannten, liefern alle Aufgaben, in welchen die unbekannten in denselben Beziehungen vorkommen. Findet letzteres nicht statt, so entscheidet die Aufgabe, oder ihre Darstellung durch die Gleichung.

2. Das Produkt zweier Zahlen ist 60, ihre Differenz = 4; welche Zahlen sind dieß?

$$xy = 60, \quad \text{also } x = \frac{60}{y}.$$

$$x - y = 4.$$

oder $$\frac{60}{y} - y = 4.$$

$$60 - y^2 = 4y; \text{ woraus}$$
$$y = +6, \text{ oder } -10, \text{ und also}$$
$$x = \frac{60}{6} = 10, \text{ oder } \frac{60}{-10} = -6.$$

Es ist also entweder $x = 10$ und $y = 6$, oder $x = -6$ und $y = -10$.

3. Von welchen Zahlen ist die Summe der Quadrate 100, die Summe der Zahlen 14?

$$x^2 + y^2 = 100$$
$$x + y = 14.$$

Aus der ersten Gleichung ist $x = \sqrt{100 - y^2}$ und aus der 2ten $= 14 - y$, also

$$\sqrt{100 - y^2} = 14 - y \text{ (quadrirt)}$$
$$100 - y^2 = 196 - 28y + y^2$$
$$2y^2 - 28y = -96$$
$$y^2 - 14y = -48.$$

woraus $y = 6$ oder 8, und also $x = 8$ oder 6, wie in Nro. 1.

4. $x = my$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = a.$$

Substituirt man den Werth von x in die zweite Gleichung, so erhält man

$$\sqrt{my} - \sqrt{y} = a.$$
$$(\sqrt{m} - 1)\sqrt{y} = a.$$
$$\sqrt{y} = \frac{a}{\sqrt{m} - 1}.$$
$$y = \left(\frac{a}{\sqrt{m} - 1}\right)^2 \text{ und } x = m\left(\frac{a}{\sqrt{m} - 1}\right)^2.$$

5. Aus dem Produkte zweier Zahlen $= 24$, und der Differenz ihrer Quadrate $= 55$ die Zahlen zu finden?

$$xy = 24$$
$$x^2 - y^2 = 55.$$

x ist aus der ersten Gleichung $\frac{24}{y}$, hiemit die 2te

$$\left(\frac{24}{y}\right)^2 - y^2 = \frac{576}{y^2} - y^2 = 55.$$
$$576 - y^4 = 55y^2, \text{ oder } y^4 + 55y^2 = 576.$$

Setzt man $y^2 = z$, so erhält man

$$z^2 + 55z = 576, \text{ woraus}$$
$$z = 9, \text{ oder } -64;$$

also $y = \sqrt{9} = 3$, oder $\sqrt{-64}$ imaginär,

woraus also hervorgeht, daß nur der Werth $z = 9$ zulässig ist, y also $= 3$ und daher $x = \frac{24}{3} = 8$.

6. $xy = m$

$n(x - y) = x^2 - y^2$.

Da $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

so ist $n \cdot (x - y) = (x + y)(x - y)$

$n = x + y$.

Daher die Aufgabe mit Nro. 1 einerlei.

7. Aus dem Produkt zweier Zahlen $= 12$, und der Summe ihrer Cubusse $= 91$ die Zahlen zu finden?

$xy = 12$

$x^3 + y^3 = 91$.

Quadrirt man die zweite Gleichung, so erhält man

$x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = 8281$

und zieht man hievon den 4fachen Cubus der ersten $4x^3y^3 = 6912$ ab, so bleibt

$x^6 - 2x^3y^3 + y^6 = 1369$, woraus die

$x^3 - y^3 = 37$; also

$x^3 + y^3 = 91$

$x^3 - y^3 = 37$.

$2x^3 = 128$

$x^3 = 64$

$x = 4$, und $y = \frac{12}{4} = 3$.

8. Die Summe zweier Zahlen ist 9, und die Summe ihrer 3ten Potenzen 189, wie heißen die Zahlen?

$x + y = 9$ und $x^3 + y^3 = 189$

Erhebt man die erste Gleichung zur 3ten Potenz

so ist $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 729$.

davon die 2te $-x^3 - y^3 = -189$

bleibt $3x^2y + 3xy^2 = 540$

$3xy(x + y) = 540$.

$3xy(9) = 27xy = 540$.

$xy = 20$.

und $x + y = 9$.

Quadrirt man nun $x + y = 9$, so ist

$x^2 + 2xy + y^2 = 81$. wovon $4xy = 80$ abgezogen

$$\begin{array}{r} -\ 4xy = -\ 80 \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 = 1 \end{array}$$

bleibt, und

$$x - y = 1.$$

Man hat daher $x + y = 9$

$$\begin{array}{r} x - y = 1 \\ \hline 2x = 10 \end{array}$$

$x = 5$ und $y = 4$, oder umgekehrt.

9. Aus der Differenz zweier Zahlen ($= 2$) und der Differenz ihrer Cubusse $= 26$ die Zahlen zu finden?

$$x - y = 2$$
$$x^3 - y^3 = 26.$$

Man dividire die 2te Gleichung durch die erste

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2 = \frac{26}{2} = 13,$$

und quadrire die erste

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 2^2 = 4.$$

Zieht man die erhaltenen Werthe von einander ab

$$\begin{array}{r} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \\ \hline 3xy = 9 \end{array}$$

$$xy = 3.$$

$$x = \frac{3}{y},$$

also

$$x - y = \frac{3}{y} - y = 2$$
$$3 - y^2 = 2y$$
$$y^2 + 2y = 3,$$

woraus $y = 1$ oder -3

also $x = 3$ oder -1.

10. Es sollen die Werthe von x, y und z aus nachstehenden Gleichungen gefunden werden?

$$x(y + z) = 5.$$
$$y(x + z) = 8.$$
$$z(x + y) = 9.$$

Wird die Multiplication vollzogen, so erhält man

$$xy + xz = 5$$
$$xy + yz = 8$$
$$xz + yz = 9, \text{ und deren Summe}$$
$$2xy + 2xz + 2yz = 22$$
$$xy + xz + yz = 11,$$

und wenn man nach und nach die so eben addirten Gleichungen von ihrer Summe abzieht, erhält man

$$yz = 6$$
$$xz = 3$$
$$xy = 2, \text{ oder}$$
$$x^2y^2z^2 = 36.$$
$$xyz = 6.$$

Da nun $yz = 6$, so muß

$$\frac{xyz}{yz} = x = \frac{6}{6} = 1.$$
$$\frac{xyz}{xz} = y = \frac{6}{3} = 2.$$
$$\frac{xyz}{xy} = z = \frac{6}{2} = 3 \text{ sein.}$$

11. $(x^2 + y^2)(x + y) = 65.$
$(x^2 - y^2)(x - y) = 5.$

Wird die Multiplication wirklich vollzogen, so ist

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 65$$
$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 5$$

$$2x^3 + 2y^3 = 70, \text{ und}$$
$$x^3 + y^3 = 35.$$

subtrahirt man beide Ausdrücke, so erhält man

$$2x^2y + 2xy^2 = 60, \text{ also auch}$$
$$3x^2y + 3xy^2 = 90, \text{ hiezu}$$
$$x^3 + y^3 = 35$$
$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3 = 125.$$

und $\sqrt[3]{\quad}$ $x + y = 5.$

Es ist aber

$$(x^2-y^2)(x-y) = (x+y)(x-y)(x-y) = (x+y)(x-y)^2 = 5,$$

daher auch $\frac{(x + y)(x - y)^2}{(x + y)} = (x - y)^2 = \frac{5}{5} = 1.$

und auch $x - y = 1$.

wozu $x + y = 5$ addirt

$2x = 6$

$x = 3$, und

$y = 2$ gibt.

12. $x + y = 7$

$x^3 + y^3 + xy\,(x + y) = 259.$

Diese Gleichung wird mit Benützung des Satzes $x^3 + y^3 = (x^2 - xy + y^2)\,(x + y)$ leicht aufgelöst.

$(x^3+y^3)+xy\,(x+y) = (x^2+y^2)\,(x+y) = 259$, und da

$(x + y) = 7$, $(x^2 + y^2) = 37.$

Aus den beiden Ausdrücken $x + y = 7$, und $x^2 + y^2 = 37$, findet man aber nach Nro. 3, $x = 6$ oder 1 und $y = 1$ oder 6 selbst.

13. Zweier Zahlen Product, Summe und Summe der Quadrate ist einander gleich, wie heißen die Zahlen?

$$xy = x + y = x^2 + y^2,$$

setzt man $x = a + b$, und $y = a - b$, so erhält man

$$a^2 - b^2 = 2a = 2a^2 + 2b^2.$$

Die 2 ersten dieser Ausdrücke geben $b^2 = a^2 - 2a$, und dieß in der Gleichung $2a = 2a^2 + 2b^2$ substituirt, gibt

$2a = 2a^2 + 2a^2 - 4a$

$6a = 4a^2$

$\frac{3}{2} = a$, und

$$b = \sqrt{\frac{9}{4} - 3} = \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

also $$x = a + b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$y = a - b = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$xy = \frac{3+\sqrt{-3}}{2} \times \frac{3-\sqrt{-3}}{2} = 3.$$

$$x+y = \frac{3+\sqrt{-3}}{2} + \frac{3-\sqrt{-3}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$x^2+y^2 = \frac{6+6\sqrt{-3}}{4} + \frac{6-6\sqrt{-3}}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

14. Von welchen 2 Zahlen ist Summe, Product und Differenz der Quadrate gleich? Bezeichnen wieder x und y diese Zahlen, so muß also

$$x + y = xy = x^2 - y^2,$$

setzt man $x + y = x^2 - y^2$,

und dividirt mit $x + y$

so erhält man $1 = x - y$, oder $x = y + 1$,

also $y + y + 1 = (y + 1)y$

$$2y + 1 = y^2 + y$$

$$y^2 - y = 1,$$

woraus $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, oder $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$,

und $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, oder $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

$$xy = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \times \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3 \pm 4\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{4}}{4} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

$$x + y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

$$x^2 - y^2 = \frac{14 \pm 6\sqrt{5}}{4} - \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{4} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Mit Hilfe der angewandten Vortheile findet man:

1) aus $x^2y^3 = 8$

$$x^3y^2 = 128, \quad x = 8 \text{ und } y = \frac{1}{2}.$$

2) $x^2 - xy = 84$

$xy - y^2 = 68$, $x = \pm 21$, $y = \pm 17$.

3) $(x^2 + y^2) : xy = 1105 : 552$

$x^2 - y^2 = 47$, $x = \pm 24$, $y = \pm 23$.

4) $x^2 + y^2 = \frac{66351}{x + y}$

$$xy = \frac{33150}{x+y}, \quad x = \begin{cases} 26 \\ 25 \end{cases}, \quad y = \begin{cases} 25 \\ 26 \end{cases}.$$

5) $\frac{x^2 + xy + 41}{6x - 2} = x - 12.$

$$\frac{xy}{2} = \frac{x^2 - 34}{3}, \quad x = \begin{cases} 17 \\ \frac{1}{13} \end{cases}, \quad y = \begin{cases} 10 \\ -\frac{3830}{13}. \end{cases}$$

6) $4x : \sqrt{2y} = 22 : 3$

$$y - x = 7 \quad x = \begin{cases} 11 \\ -\frac{77}{18}, \end{cases} \quad y = \begin{cases} 18 \\ \frac{49}{18}. \end{cases}$$

Logarithmische Gleichungen.

104.

Kann man solche Gleichungen heißen, die entweder mit Hilfe der Logarithmen bequemer, oder nur allein mit Anwendung derselben aufgelöst werden können.

Zu den erstern gehören alle reinen höhern Gleichungen, so wie jene, in welchen die unbekannten in verwickelten Ausdrücken mit verschiedenen hohen Exponenten und Wurzeln vorkommen.

1) $x^m = b.$

$$m \log. x = \log. b.$$

$$\log. x = \frac{\log. b}{m}.$$

$$\frac{x^7 + 25}{2} = 80.$$

$$x^7 = 135.$$

$$7 \log. x = \log. 135.$$

$$\log. x = \frac{\log. 135}{7} = \frac{2,130334}{7} = 0,304333 =$$

$$2,015 \ldots = x.$$

2) $\sqrt[m]{\left(\frac{c+x}{c-dx}\right)^n} = b.$

$$\left(\frac{c+x}{c-dx}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{b}{a}.$$

$$\frac{n}{m} \log. \left(\frac{c+x}{c-dx}\right) = \log. \left(\frac{b}{a}\right).$$

$$\log. \left(\frac{c+x}{c-dx}\right) = \frac{m}{n} \log. \frac{b}{a}.$$

Ist nun der Ausdruck $\frac{m}{n} \log. \left(\frac{b}{a}\right)$ berechnet $= p$, so ist

$\frac{c + x}{c - dx} = p$, woraus $x = \frac{(p-1)c}{1 + dp}$.

$\sqrt[5]{\left(\frac{3x+5}{x-2}\right)^3} = 240.$

$\frac{3}{5} \log. \left(\frac{3x+5}{x-2}\right) = \log. 240.$

$\log. \left(\frac{3x+5}{x-2}\right) = \frac{5}{3} \log. 240 = 3{,}967018$, und

$\frac{3x+5}{x-2} = 9268{,}7$, woraus $x = 2{,}0012 \ldots$

3. $\sqrt[3]{\left(\frac{x^3 + 2x^2}{5x+6}\right)^5} = 32.$

$\frac{5}{3} \log. \left(\frac{x^3 + 2x^2}{5x+6}\right) = \log. 32.$

$\log. \frac{x^3 + 2x^2}{5x+6} = \frac{3}{5} \log. 32 = 0{,}903090$, und

$\frac{x^3 + 2x^2}{5x+6} = 8$, oder $x^3 + 2x^2 - 40x - 48 = 0$,

woraus $x = 6$, $x = -4 \pm \sqrt{8}$ ist.

Zur 2ten Art der logarithmischen Gleichungen gehören jene, in welchen die unbekannte Größe selbst als Exponent vorkommt, und die nicht mehr als 2 Glieder enthält, oder wenigstens darauf reducirt werden kann. Allgemeine Formen sind:

1. $a^x = c$, wofür $x \log. a = \log. c$, und $x = \frac{\log. c}{\log. a}$.

2. $a^x = b^{x+m}$, wofür $x \log. a = (x + m) \log. b.$

oder $x \log. a = x \log. b + m \log. b.$

woraus $x = \frac{m \log. b}{\log. a - \log. b}$.

Wo x jede ganze oder gebrochene positive oder negative Zahl sein kann.

Diese Gleichung könnte auch so behandelt werden:

$a^x = b^{x+m}$, und $\sqrt[x]{\ }$.

$a = b^{\frac{x+m}{x}}$, und $\log. a = \left(\frac{x+m}{x}\right) \log. b.$

$x \log. a = x \log. b + m \log. b$, wie oben.

3. $a^{x^m} = b^n$ wird

$$x^m \log. a = n \log. b, \text{ und } x^m = \frac{n \log. b}{\log. a},$$

$$\text{woraus } x = \sqrt[m]{\frac{n \log. b}{\log. a}}.$$

oder $a^{x^m} = b^n$, $x^m \log. a = n \log. b$, und

$$m \log. x + \log. \log. a = \log. n + \log. \log. b,$$

$$\text{woraus } \log. x = \frac{\log. n + \log. \log. b - \log. \log. a}{m}.$$

4. $a^{mx} \cdot \sqrt[x]{b^{nx+p}} = c.$

$$mx \log. a + \left(\frac{nx + p}{x}\right) \log. b = \log. c.$$

$$mx^2 \log. a + nx \log. b + p \log. b = x \log. c.$$

$$x^2 + \left(\frac{n \log. b - \log. c}{m \log. a}\right) x = -\frac{p \log. b}{m \log. a},$$

welche Gleichung mit $x^2 + dx = -f$ gleiche Form hat, und deren Auflösung nun bekannt ist.

5. $a \sqrt[m]{x^n} = b^{x^n}$

$$\sqrt[m]{x} \log. a = x^n \log. b.$$

$$\frac{\log. a}{\log. b} = \frac{x^n}{\sqrt[m]{x}} = x^{n - \frac{1}{m}} = x^{\frac{mn-1}{m}}.$$

$$\left(\frac{mn - 1}{m}\right) \log. x = \log. \log. a - \log. \log. b.$$

$$\log. x = \frac{(\log. \log. a - \log. \log. b)\, m}{mn - 1}.$$

6. $\sqrt[x]{m} \sqrt{a} = b^{n^x}$

$$\frac{\log. a}{\sqrt[x]{m}} = n^x \log. b.$$

$$\log. \log. a - \frac{\log. m}{x^{\frac{m+x}{}}} = x \log. n + \log. \log. b.$$

$$x \log. \log. a - \log. m = x^2 \log. n + x \log. \log. b.$$

$$x^2 + x\left(\frac{\log. \log. b - \log. \log. a}{\log. n}\right) = \frac{-\log. m}{\log. n}.$$

Da die Entwicklung solcher logarithmischen Ausdrücke aus §. 77. und 81. schon bekannt ist, so wurde die ausführliche Behandlung nachstehender Gleichungen unterlassen. Für

1. $3^x = 177147$ ist $x = 11$.

2. $\left(\frac{21}{20}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{7x}{2}} = \frac{7}{12}$ » $x = 0{,}3099 \ldots$

3. $\sqrt[x-1]{18^{2x+5}} = 5832$ » $x = 8$.

4. $12^{x+1} = 27 \cdot 4^{x+1}$ » $x = 2$,

denn die Gleichung ist einerlei mit

$$12^x \cdot 12 = 27 \cdot 4^x \cdot 4, \text{ oder}$$

$$\frac{12^x}{4^x} = \left(\frac{12}{4}\right)^x = \frac{27 \cdot 4}{12} = 9, \text{ oder } 3^x = 9.$$

5. $4 \cdot 5^{4x} - 3 \cdot 5^{2x} = 85$ » $x = \frac{1}{2}$,

denn die Gleichung ist wieder einerlei mit $4 \cdot (5^{2x})^2 - 3 \cdot 5^{2x} = 85$,

woraus nach §. 102. $5^{2x} = \frac{3 \pm 37}{8}$, also entweder:

$$5^{2x} = 5$$

$$\frac{5^{2x}}{5} = \frac{5}{5}, \quad 5^{2x-1} = 1, \text{ und } (2x - 1) \log. 5 = 0,$$

$$2x - 1 = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \text{ oder}$$

$$5^{2x} = -\frac{17}{4}, \text{ oder } 5^x = \frac{1}{2}\sqrt{-17} \text{ unmöglich.}$$

6. $\sqrt{2} = \sqrt[4]{3^x}$ » $x = 1{,}26 \ldots$

7. $2{,}5^x = \sqrt[x]{75000}$, $x = 3{,}5 \ldots$

8. $3^{x^2} = 729$, $x = 3$.

Sehr schöne und mannigfaltige Beispiele dieser Art liefern die geometrischen Progressionen.

Gleichungen, in denen die unbekannte als Exponent und anders erscheint, können auf die angegebene Weise nicht aufgelöst werden.

z. B. $2^{x-2} = x^2$, wo jedoch bei einigem Nachdenken sich ergibt, daß $x = 8$ sei, da $2^6 = 8^2 = 64$.

Unbestimmte Gleichungen.

105.

Heißen solche, bei welchen die Anzahl der unbekannten Größen die Zahl der unter sich unabhängigen Gleichungen übersteigt.

Es folgt daraus, daß es unbestimmte Gleichungen mit 2 und mehreren unbekannten Größen, so wie vom 1sten, 2ten und höhern Graden gäbe.

Die Auflösung der unbestimmten Gleichungen hat denselben Gang, wie die der bestimmten mit mehreren unbekannten. Man eliminirt nemlich aus den gegebenen Gleichungen so viele unbekannten, als möglich ist, um eine einzige Gleichung mit dem Minimum von unbekannten zu erhalten. In der zuletzt erhaltenen betrachte man eine Größe als unbekannt, und setze für die übrigen beliebige Werthe, so wird dadurch auch der Werth der als unbekannt angenommenen bestimmt. Die übrigen (eliminirten) findet man durch allmähliges Substituiren rückwärts, wie bei den bestimmten.

I. Man suche 2 Zahlen, deren Summe 10 ist?

Heißt man die Zahlen x und y, so erhält man die Gleichung $x + y = 10$, woraus $x = 10 - y$, in welcher Gleichung man für y alle nur denkbare (ganze und gebrochene, positive und negative) Zahlen setzen könnte, und daher die Aufgabe eine unendliche Menge Auflösungen zuließe. Man beschränkt jedoch gewöhnlich diese Menge von Auflösungen dadurch, daß die unbekannten nur ganze und positive Zahlen sein sollen, daher in dem gegebenen Fall y nicht größer als 10 sein kann, weil sonst x negativ würde, und also nur folgende Auflösungen möglich sind: wenn

$y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, so ist
$x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Da aber hiebei die 4 ersten und letzten einerlei sind, so sind nur 5 Auflösungen möglich.

Sollte dieselbe Zahl (10) in 3 oder 4 Zahlen zerlegt werden, so dürfte man nur die eine der gefundenen in 2 oder 3, oder jede der beiden (wo es thunlich ist), in 2 zerlegen.

Behalten wir diese Bestimmung, daß die unbekannten nur posi=

tive ganze Zahlen sein sollen, bei, so heißt eine unbestimmte Aufgabe auflösen: Ganze positive Zahlen finden, welche an die Stelle der unbekannten gesetzt, die Gleichungen der Aufgabe erfüllen. Durch diese einschränkende Bedingung geschieht es zuweilen, daß nur einige wenige, eine einzige, ja manchmal gar keine, dagegen oft der Einschränkung ungeachtet, unendlich viele Auflösungen möglich sind. Man nennt auch die unbestimmten Gleichungen diophantische, von dem Alexandriner Diophantus, welcher, wenn auch nicht als Erfinder, doch als Sammler des in diesem Theile der Mathematik schon früher entdeckten, anzusehen ist.

Die Rechnung, welche die Auflösung solcher unbestimmten Aufgaben, in welcher die gesuchten Größen, Faktoren gegebener Zahlen, in der einen Gleichung, und in der andern Summanden sind, heißt auch regulae coeci oder virginum, weil auch Blinde und (unstudirte) Mädchen sie auflösen könnten.

2. Man theile 60 in 2 Theile, deren einer durch 5, und der andere durch 4 theilbar ist? Da jede durch 5 theilbare Zahl durch $5x$, jede durch 4 theilbare durch $4y$ dargestellt werden kann, so erhält man die Gleichung:

$$5x + 4y = 60, \quad \text{woraus}$$

$$x = \frac{60 - 4y}{5} = 12 - \frac{4y}{5},$$

und da x eine ganze Zahl sein soll, so ist y so zu wählen, daß $\frac{4y}{5}$ ebenfalls eine ganze Zahl ist, doch so, daß der Ausdruck stets < 12 wird, weil sonst $x = 0$ oder negativ würde. Setzt man also

$y = 0, 5, 10, 15,$ so wird

$x = 12, 8, 4, 0.$

also eigentlich nur 2 Auflösungen 5 und 8, 10 und 4.

Für $ax + by = c$, wo a, b und c ganze Zahlen sind, so daß also die Gleichung als allgemeine Formel für alle unbestimmte Gleichungen des ersten Grades mit 2 unbekannten gilt, sind folgende Eigenschaften giltig:

1) Sind a, und b positiv und relative Primzahlen, c aber positiv oder negativ, so läßt sich die Gleichung durch ganze Zahlen auflösen.

Dasselbe ist der Fall, wenn a, b und c einen gemeinschaftlichen Theiler haben.

2) Haben aber a und b einen Theiler, der nicht zugleich c theilt, so ist die Auflösung nicht möglich, weil c ein Bruch wird.

3) Sind a und b positiv, und c negativ, so können x und y nicht positiv sein, so wie auch, wenn $a + b > c$ ist.

4) Ist b negativ, so sind, c mag sein wie es wolle, unendlich viele Auflösungen möglich, wenn die Gleichung im Uebrigen der allgemeinen Bedingung der Auflösbarkeit genügt.

5) Am einfachsten ist der Fall, wenn $c = 0$, und $ax = by$ wird, wo also $x = \frac{by}{a}$, und $y = \frac{ax}{b}$ wird.

3. Jemand kauft zweierlei Wein, von der einen Sorte kostet der Eimer 20, von der andern 31 fl. Da nun der erstere um 7 fl. im ganzen mehr kostete, als der andere, so fragt man, wie viel es Eimer von jeder Sorte waren?

Nimmt man vom ersten x, und vom andern y Eimer, so erhält man die Gleichung

$$20x = 31y + 7, \quad \text{und} \quad x = \frac{31y + 7}{20}.$$

Da aber hier schwer zu errathen ist, welche Zahl für y substituirt, eine ganze Zahl als den Werth für x hervorbringt, so beobachte man folgendes Verfahren:

$$x = \frac{31y + 7}{20} = y + \frac{11y + 7}{20} = y + a,$$

wo a eine ganze Zahl bedeutet.

$$\text{Aus } \frac{11y + 7}{20} = a \text{ ist } y = \frac{20a - 7}{11} = a + \frac{9a - 7}{11}.$$

$$\text{Ist nun } \frac{9a - 7}{11} = b, \text{ so ist } a = \frac{11b + 7}{9} = b + \frac{2b + 7}{9},$$

$$\text{und wenn } \frac{2b + 7}{9} = c, \text{ so ist } b = \frac{9c - 7}{2} = 4c - 3 + \frac{c - 1}{2},$$

$$\text{endlich, wenn } \frac{c - 1}{2} = d, \text{ so ist } c = 2d + 1.$$

So gelangt man stets zu einer Gleichung ohne einen Bruch, und wenn man nun für d nach und nach die natürlichen Zahlen setzt,

so weit es die Umstände der Aufgabe gestatten, zu den Werthen von x und y. Für

$$d = 0 = 1 = 2$$

ist

$$c = 1 = 3 = 5$$

$$b = 1 = 10 = 19$$

$$a = 2 = 13 = 24$$

$$y = 3 = 23 = 43$$

$$x = 5 = 36 = 67 \text{ u. s. w.}$$

Oder man sucht eine allgemeine Formel für x und y dadurch, daß man den zuletzt gefundenen Werth so lange rückwärts substituirt, bis man auf x und y kommt. Da nemlich

$c = 2d + 1$, so ist

$$b = 4c - 3 + \frac{c - 1}{2} = 9d + 1,$$

$$a = b + \frac{2b + 7}{9} = 11d + 2,$$

$$y = a + \frac{9a - 7}{11} = 20d + 3, \text{ und endlich}$$

$$x = y + a = 31d + 5,$$

wo also wieder d jeden Werth annehmen kann, der keinen Bruch hervorbringt; und wodurch man nun für $d = 0, 1, 2, 3$ u. s. w. gesetzt, erhält

$y = 3, 23, 43, 63, 83 \ldots$

$x = 5, 36, 67, 98, 129 \ldots$.

4. Man theile 100 in 3 Theile, so daß der erste mit 24, der zweite mit 20, und der dritte mit 18 multiplicirt, die Summe 1964 hervorbringen. Wie groß sind die Theile?

Der erste heiße x, der zweite y, und der dritte z, so hat man

$$x + y + z = 100, \text{ und}$$

$$24x + 20y + 18y = 1964,$$

und wenn z eliminirt wird

$$6x + 2y = 164, \text{ oder}$$

$$3x + y = 82, \text{ also}$$

$$y = 82 - 3x,$$

wobei jeder beliebige ganze Werth von x einen ganzen für y gibt, und da alle 3 positiv sein sollen, so darf x nicht größer als 27 sein. Setzt man daher

$x = 1, 2, 3, 4 \ldots$. bis 27, so wird

y = 79, 76, 73, 70 . . . . bis 1, und
z = 20, 22, 24, 26 . . . . » 72.

5. Man soll für

a b c
d e f
g h i

solche Zahlen finden, daß die Summe jeder 3 Zahlen, welche in gerader Linie stehen, = m sei. Der Aufgabe gemäß muß

$$a + b + c = m$$
$$d + e + f = m$$
$$g + h + i = m$$
$$a + d + g = m$$
$$b + e + h = m$$
$$c + f + i = m$$
$$a + e + i = m$$
$$c + e + g = m \text{ werden.}$$

Schafft man hierin nach und nach eine Unbekannte weg, so bleibt zuletzt eine Gleichung mit 3 unbekannten, woraus hervorgeht, daß die Gleichungen nur 7 von einander verschiedene sind. Eine solche übrig bleibende Gleichung ist z. B.

$$d = \frac{m}{3} + c - a,$$

woraus folgt, daß m durch 3 theilbar sein muß.

Nimmt man z. B. $m = 21$, so wird $d = 7 + c - a$, wo man für c und a willkührliche Zahlen annehmen kann, wobei jedoch a nicht $> c + 7$ sein darf, weil sonst d negativ würde. Setzt man für $a = 4$, und $c = 3$, so wird $d = 6$, und wenn man diese Werthe in die gegebenen Gleichungen setzt, erhält man für

$b = 14$, $e = 7$, $f = 8$, $g = 11$, $h = 0$, $i = 10$,

oder

4.	14.	3
6.	7.	8
11.	0.	10.

eine der möglichen Auflösungen, deren eine Menge anderer noch möglich ist, wenn man für m eine andere durch 3 theilbare Zahl wählt.

6. Ein Viehhändler kauft 50 Stück: Ochsen, Schweine und Kälber für 684 fl., und zwar kostet jeder Ochs 40 fl., ein Schwein 8 fl., und ein Kalb 3 fl. Wie viel Stück hat er von jeder Art bekommen?

Bedeutet x die Ochsen, y die Schweine, und z die Kälber, so hat man die Gleichungen

$$x + y + z = 50$$
$$40x + 8y + 3z = 684.$$

Man findet zuletzt folgende allgemeine Formeln $x = 7 + 5m$, $y = 55 - 37m$, und $z = 32m - 12$, und setzt man für m nach und nach 0, 1, 2 u. s. w., so ist

x =	7,	12,	17,	22,
y =	55,	18,	— 19,	— 56,
z =	— 12,	20,	52,	84.

und für $m > 1$ stets der Werth von y negativ.

Da nun aber den Bedingungen der Aufgabe zu Folge keiner der Werthe negativ sein kann, so kann nur die zweite Auflösung als giltig angesehen werden, so daß die Aufgabe als bestimmt zu betrachten ist. Diese Bestimmtheit aber gilt nur für den Fall, daß die 3 Zahlen ganz und positiv sein sollen, was in der Natur der unbestimmten Gleichungen nicht liegt, denn die beiden Gleichungen lassen eine Menge Auflösungen zu, wenn x, y, z gebrochen, oder negativ sein dürfen, und es ist also immerhin eine unbestimmte Aufgabe.

7. Die Summe und das Product zweier ganzen positiven Zahlen sei 79, wie heißen die Zahlen?

Die dazu gehörige Gleichung heißt

$$x + y + xy = 79, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{79 - y}{y + 1} = -1 + \frac{80}{y + 1},$$

wofür x eine ganze Zahl wird, so oft $y + 1$ ein Faktor und 80 ist. Ist daher

$y + 1$ =	2,	4,	8,	16,	5,	10,	20,	40,	80,	1
folglich y =	1,	3,	7,	15,	4,	9,	19,	39,	79,	0,
so wird x =	39,	19,	9,	4,	15,	7,	3,	1,	0,	79.

und da hier x eben so gut die eine als die andere Zahl bedeuten kann, so bleiben nur die 5 Auflösungen 1 und 39, 3 und 19, 7 und 9, 15 und 4, und 79 und 0.

8. Zwei ganze Zahlen zu finden, deren Quadrate um eine ganze Zahl (m) unterschieden sind?

Sind die Zahlen x und y, so hat man die Gleichung

$$x^2 - y^2 = m, \text{ oder}$$

$$(x + y)(x - y) = m,$$

es ist also $x + y$, und $x - y$ ein Faktor von m, und wenn $x + y = p$ und $x - y = q$ gesetzt wird, so ist $x = \frac{p + q}{2}$, und $y = \frac{p - q}{2}$. Da nun x und y ganze Zahlen sind, so müssen p und q entweder beide gerade oder beide ungerade Zahlen sein.

Ist also m eine gerade Zahl, so ist die Auflösung nur dann möglich, wenn $\frac{m}{4}$ eine ganze Zahl ist. Dagegen ist die Auflösung stets möglich, wenn m ungerade ist.

Für $m = 12$ ist $p = 6$, und $q = 2$, also $x = 4$, $y = 2$, und $x^2 - y^2 = 16 - 4 = 12$.

Für $m = 3$ ist $p = 3$, $q = 1$, also $x = 2$ und $y = 1$, und $x^2 - y^2 = 4 - 1 = 3$.

Für $m = 1$ ist p und $q = 1$, mithin $x = 1$ und $y = 0$ d. h. Die Quadrate zweier ganzer Zahlen können nie um eins verschieden sein.

9. Zwei Quadrate zu finden, deren Summe wieder ein Quadrat ist?

Man erhält die Gleichung $x^2 + y^2 = m^2$.

Man setze für x und y solche Werthe, daß $x^2 + y^2 =$ einem reinen Quadrat wird. z. B.

$x = 2ab$ und $y = a^2 - b^2$, (mithin $a > b$), so ist

$$x^2 + y^2 = 4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = m^2.$$

Wo a und b alle möglichen ganze und gebrochene Zahlen sein können.

Für $a = 2$ und $b = 1$, ist $x = 4$, $y = 3$ und $x^2 + y^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$.

Für $a = 5$ und $b = 4$, ist $x = 40$, $y = 9$, und $x^2 + y^2 = 1600 + 81 = 1681 = (41)^2$.

10. Zwei Quadrate zu finden, deren Differenz ein Quadrat ist?

Die hiezu gehörige Gleichung heißt $x^2 - y^2 = n^2$. Setzt man $x = a^2 + b^2$, und $y = 2ab$, wo a und b beliebige Zahlen sind, so ist

$$x^2 - y^2 = (a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = n^2.$$

Ist $a = 3$, $b = 1$, so ist $x = 10$ und $y = 6$, und $x^2 - y^2 = 100 - 36 = 64 = 8^2$.

Für $a = 2$ und $b = 5$, ist $x = 29$ und $y = 20$, und $29^2 - 20^2 = 441 = 21^2$.

Es gibt keine zwei ungerade Zahlen, deren Quadrate zur Summe oder Differenz ein Quadrat haben.

106.

Nicht selten scheint eine Aufgabe bestimmt zu sein, welche eigentlich doch unbestimmt ist. Dies ist stets der Fall, wenn zwar so viele Gleichungen, als unbekannte Größen vorhanden sind, aber die Gleichungen nicht alle wesentlich von einander verschieden sind, wie §. 90. ein Fall gegeben ist, oder die Gleichung

$$x + y = 40$$
$$y + z = 100$$
$$z - x = 60$$

darbietet, weil $z - x = 60$ erhalten wird, wenn die erste von der zweiten Gleichung abgezogen wird. Als unbestimmte Gleichung nun findet man

$$x = 1, 2, 3, 4 \ldots 39$$
$$y = 39, 38, 37, 36 \ldots 1$$
$$z = 61, 62, 63, 64 \ldots 99.$$

Durch Hinzufügen gewisser Bedingungen kann jede unbestimmte Gleichung in eine bestimmte umgewandelt werden.

Auch wurde früher schon erwähnt, daß es öfter unmöglich ist, für die unbekannten Größen, Werthe zu finden, welche den Bedingungen der Aufgabe, entsprechen.

Dieser Fall tritt ein, wenn die Bedingungen der Aufgabe sich widersprechen, oder wenn irrationale, negative oder gebrochene Werthe für die unbekannten zum Vorschein kommen, während die Bedingungen der Aufgabe nur rationale, positive und ganze Zahlen zulassen. Beispiele ersterer Art sind §. 86. 11 und §. 90., welchen wir noch folgende beifügen wollen.

Welchen Werth hat x in der Gleichung

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 = -3, \text{ und } \sqrt{}$$
$$x + 1 = \sqrt{-3}$$
$$x = -1 \pm \sqrt{-3} \text{ unmöglich.}$$

Ein Vater hatte unter 9 Kindern 2 Knaben mehr als Mädchen, wie viel Knaben und Mädchen waren es?

x Knaben, und y Mädchen, woraus die Gleichungen

$$x + y = 9$$
und $$x - y = 2$$

$$\text{woraus} \quad x = \frac{11}{2} = 5\tfrac{1}{2}$$

$$\text{und} \quad y = 3\tfrac{1}{2}.$$

Die Aufgabe ist unmöglich, da hier die unbekannten keine gebrochenen Werthe zulassen.

Jemand hatte dreimal so viel Ducaten, als Thaler, und als er 5 Ducaten und 3 Thaler ausgegeben, besaß er noch zweimal so viel Ducaten als Thaler, wie viel von jeder Geldsorte hatte er?

x Thaler, also 3x Ducaten, nach der Ausgabe x — 3 Thaler, und 3x — 5 Ducaten, daher

$3x - 5 = 2(x - 3)$, woraus $x = -1$, für den gegebenen Fall unmöglich, obwohl in vielen andern Fällen die unbekannte negativ sein kann.

Von den Progressionen.

107.

Jede Folge von Größen, die nach einem gewissen Gesetze fortläuft (progredi), heißt eine Reihe oder Progression im allgemeinen; dieses Fortschreiten ist durch fortwährende Zu- oder Abnahme dargestellt; so schreitet z. B. die Reihe

1, 3, 5, 7, 9 . . . durch fortwährendes Addiren der Zahl 2 zu der vorhergehenden Zahl, und die Reihe

12, 10, 8, 6, 4 . . . durch fortwährende Subtraction, dagegen

1, 2, 4, 8, 16 . . . durch Multiplication mit 2,

27, 9, 3, $\frac{1}{3}$, . . . durch Division mit 3 fort.

Die beiden ersten heißen arithmetische, letztere geometrische Reihen, weil man sie durch fortwährende Zusammensetzung stetiger arithmetischer und geometrischer Proportionen entstanden denken kann.

Die einzelnen Theile der Reihe heißen die Glieder. Die Reihe selbst heißt zu- oder abnehmend, je nachdem die Fortsetzung durch Addition und Multiplication, oder durch Subtraction und Division

geschieht. Je nachdem die Anzahl der Glieder begränzt oder unbegränzt ist, heißt die Reihe endlich oder unendlich.

Die allgemeinen Formen dieser beiden Arten von Reihen sind

für arithmetische:

$$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d) + \ldots$$

für geometrische:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots$$

In der arithmetischen Progression heißt (d) d. i. die Größe, welche das Gesetz des Fortschreitens bedingt, die Differenz, und die Größe (q) in den geometrischen der Exponent.

In jeder Progression kommen folgende 5 verschiedene Größen vor:

1) das erste Glied,
2) die Differenz (für arithmetische), der Exponent (für geometrische),
3) das letzte Glied, oder der Ausdruck für jedes beliebige Glied,
4) die Anzahl aller Glieder, und
5) die Summe aller Glieder.

Arithmetische Progressionen.

108.

Aus der allgemeinen Form der arithmetischen Progressionen

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)+\ldots$$

lassen sich folgende 2 Hauptgleichungen ableiten:

1. Man sieht, daß d im zweiten Gliede eintritt, und in jedem folgenden Gliede einmal öfter erscheint, als im vorhergehenden, so daß also der Coefficient von (d) allzeit um 1 kleiner ist, als die Stelle, wo das Glied steht, (die man auch Zeiger (index) heißt), z. B. in der gegebenen Progression ist der Coefficient im dritten Gliede 2, im vierten 3 u. s. w.

Wenn also eine Proportion n Glieder hat, so wird der Coefficient des nten Gliedes von $d = (n - 1)$ sein, und das letzte Glied selbst, wenn dasselbe durch z bezeichnet wird,

$$z = a + (n - 1)d \qquad (I)$$

d. h. jedes Glied der Reihe besteht aus der Summe des ersten, und der Differenz, letztere mit der um 1 verminderten Gliederzahl, oder mit der Anzahl der vorhergehenden Glieder multiplicirt.

2. Addirt man in der gegebenen Progression das erste und letzte, das zweite und vorletzte ꝛc., d. h. je 2 vom ersten und letzten

gleichweit abstehende Glieder, so erhält man stets gleiche Summen, denn

$a + (a + 5d)$ ist $= (a + d) + (a + 4d) = (a + 2d) + (a + 3d)$ jedes Paar $= 2a + 5d$ gleich dem ersten und letzten.

Ist die Anzahl der Glieder der Progression ungerade, so findet dasselbe statt, und das mittlere Glied, welches noch über die Anzahl der Paare bleibt, ist dann die Hälfte eines jeden Paares. Mithin ist jedes Paar gleich weit vom ersten und letzten abstehender Glieder $=$ $(a + z)$ und das mittlere $= \frac{(a + z)}{2}$. Da nun, wenn die Reihe n Glieder hat, die Anzahl der Paare $\left(\frac{n}{2}\right)$ ist, alle Paare aber nothwendig die ganze Summe ausmachen, so muß die Summe einer arithmetischen Progression (s) dem Produkte eines Paares $(a + z)$ in die Anzahl der Paare $\left(\frac{n}{2}\right)$ gleich sein, also

$$s = (a + z)\frac{n}{2}. \qquad \text{(II)}$$

Die Summe jeder arithmetischen Progression ist demnach ein Produkt aus der Summe des ersten und letzten Gliedes in die halbe Gliederzahl.

109.

Diese zwei aus der Natur der Progressionen abgeleiteten Gleichungen enthalten die §. 107 angegebenen fünf Größen. Da nun aber aus zwei Gleichungen nur zwei unbekannte gefunden werden können, so müssen bei jeder Aufgabe, die auf eine Progression führt, drei Größen bekannt sein.

Nun geben aber 5 Elemente 10 Verbindungen nach dreien, und da bei jeder dieser Complexionen von dreien der vorhandenen 5 Größen, jede der 2 übrigen verlangt werden kann, so ergeben sich hieraus 20 Gleichungen, welche alle möglichen Foderungen hiebei erschöpfen.

Aufgabe: Es sind von den 5 Größen (a, d, n, z, s) was immer für 3 gegeben, man soll den Werth der beiden übrigen finden?

Man wähle hiezu eine der beiden Hauptgleichungen, und sehe nach, ob die gegebenen und die zu suchende Größe darin enthalten sind, oder nicht.

Im ersten Falle hat man dann nur die zu suchende nach den Gesetzen der Gleichungen allein zu stellen, z. B. es ist gegeben a, n

und s; man suche z? Da die Gleichung $s = (a + z)\frac{n}{2}$ alle diese vier Grösen enthält, so ist z aus derselben $= \frac{2s - an}{n}$.

Sind aber die vier Grösen der Aufgabe nicht alle in einer der Fundamentalgleichungen gegeben, so trifft es sich allzeit, daß unter den in der Hauptgleichung vorhandenen eine nicht zur Aufgabe gehörige vorhanden ist, dagegen eine andere fehlt. Um daher die überflüssige zu entfernen, und zugleich die fehlende zu erhalten, nimmt man den Werth der überflüssigen aus der andern Hauptgleichung, und substituirt ihn in die gewählte. Aus dieser neuen Gleichung stelle man die gesuchte allein.

Es sei gegeben a, d, n, und s zu suchen?

Die Gleichung $z = a + (n - 1)d$ enthält zwar die Grösen a, d und n, aber z ist zu eliminiren, und an dessen Stelle s zu bringen. Man suche daher aus der Gleichung $s = (a + z)\frac{n}{2}$ den Werth von z, welcher $= \frac{2s - an}{n}$ ist, und seze diesen statt z in die erste Gleichung, so erhält man

$$\frac{2s - an}{n} = a + (n - 1)d, \text{ woraus}$$

$$s = \frac{2an + (n - 1)nd}{2} \text{ ist.}$$

Dasselbe hätte man erhalten, wenn man die Gleichung $s = (a + z)\frac{n}{2}$ anfangs gewählt, und statt z seinen Werth aus $z = a + (n - 1)d$ substituirt hätte.

Auf ähnliche Weise könnten nun alle 20 möglichen Formeln berechnet werden. Da aber die Entwicklung derselben keiner Schwierigkeit unterliegt, indem nur 4 davon auf quadratische, alle übrigen aber auf einfache Gleichungen führen, so ist diese Berechnung der Formeln hier übergangen, und selbe dem Fleiße des Schülers als nüzliche Uebung im Calculiren überlassen.

Sie lauten, wie hier folgt:

?	Gegeben.	Formeln.
a	d n z	$= z - (n-1)\,d$
	d z s	$= \frac{1}{2}d \pm \sqrt{\left[\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 - 2ds\right]}$
	d n s	$= \frac{s}{n} - \frac{(n-1)\,d}{2}$
	n z s	$= \frac{2s}{n} - z$
d	a n z	$= \frac{z-a}{n-1}$
	a n s	$= \frac{2s - 2an}{n\,.\,(n-1)}$
	a z s	$= \frac{z^2 - a^2}{2s - z - a}$
	n z s	$= \frac{2nz - 2s}{n\,.\,(n-1)}$
n	a d z	$= 1 + \frac{z-a}{d}$
	a d s	$= \frac{d - 2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]}$
	a z s	$= \frac{2s}{a + z}$
	d z s	$= \frac{2z + d}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2z+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right]}$
z	a d n	$= a + (n-1)\,d$
	a d s	$= -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left[2ds + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2\right]}$
	a n s	$= \frac{2s}{n} - a$
	d n s	$= \frac{s}{n} + \frac{(n-1)\,d}{2}$

?	Gegeben.	Formeln.
s	a d n	$= \frac{1}{2} n [2a + (n - 1)d]$
	a d z	$= \frac{(z - a + d)(a + z)}{2d}$
	a n z	$= (a + z)\frac{n}{2}$
	d n z	$= \frac{n}{2}[2z - (n - 1)d]$.

Ist eine arithmetische Reihe abnehmend, so nehme man d negativ, oder die ganze Reihe rückwärts, so daß das erste Glied als das letzte, und umgekehrt betrachtet wird, wodurch die fallende Progression zur steigenden wird.

Zur Uebung des Gebrauchs dieser Formeln können nachstehende Aufgaben dienen, und zwar so, daß man von einer beliebigen Reihe drei Glieder willkürlich wählt, und eines der beiden andern mit Hilfe der entsprechenden Formel sucht, dessen Werth nun mit dem in der Reihe angegebenen überein kommen muß.

a.	d.	n.	z.	s.
1	1	14	14	105
7	$\frac{1}{4}$	16	$10\frac{3}{4}$	142
$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	100	$35\frac{1}{2}$	1900
— 7	3	8	14	28
$\frac{1}{2}$	— $\frac{1}{8}$	20	— $1\frac{7}{8}$	— $13\frac{3}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	11	5	$27\frac{1}{2}$
— 10	— 2	6	— 20	— 90
— $\frac{3}{4}$.	— $\frac{7}{8}$.	25.	— $21\frac{3}{4}$.	— $281\frac{1}{4}$.

Praktische Beispiele.

110.

1. Wie groß ist die Summe der natürlichen Zahlenreihe von p bis q?

Es ist hier $a = p$, $z = q$, und $d = 1$, also
$n = q - (p - 1) = q - p + 1$, und
$s = \frac{(p + q)(q - p + 1)}{2}$, und für $p = 1$, d. h. für die natürliche Zahlenreihe von 1 angefangen

$$s = \frac{(q+1)\,q}{2} = \frac{q^2+q}{2}.$$

Man erhält demnach die Summe der natürlichen Zahlenreihe einer bestimmten Menge von Zahlen, wenn man die Hälfte der größten mit der um eins vermehrten multiplicirt; so ist die Summe der ersten 50 Zahlen $= \frac{50 \cdot 51}{2} = 1275$.

2. Wie groß ist die Summe der geraden Zahlen von $2p$ bis $2q$?

Es ist dabei $a = 2p$

$z = 2q$

$d = 2$

also $n = q - p + 1$

und $s = \frac{(2p+2q)\,(q-p+1)}{2} = (p+q)\,(q-p+1)$,

und für $p = 1$, nemlich die Summe der geraden, von 2 angefangen, bis $2q = (q+1)\,q$.

Die Summe von beliebig viel geraden Zahlen von 2 angefangen ist = dem Produkte der um eins vermehrten Anzahl der Glieder in die Gliederzahl selbst.

3. Die Summe der ungeraden Zahlen von $(2p-1)$ bis $(2q-1)$ zu finden?

Da hier $a = 2p - 1$

$z = 2q - 1$

$d = 2$

so folgt $n = q - p + 1$, und

$$s = [(2p-1)+(2q-1)] \times \frac{(q-p+1)}{2} =$$

$$(p+q-1)\,(q-p+1),$$

welche Formel für $p = 1$, d. i. für die Summe der ungeraden Zahlen von der 1sten bis qten $= q^2$ = dem Quadrat der Gliederzahl wird. Die 12 ersten ungeraden Zahlen sind also $= 12^2 = 144$.

4. Wie viele unter den Zahlen von 1 bis 1000 sind durch 6 theilbar?

Da die durch 6 theilbaren Zahlen eine Progression bilden, deren erstes Glied 6, Differenz ebenfalls 6, der Aufgabe gemäß 1000 das letzte Glied ist, so ist also die Frage, das wie vielte Glied einer solchen Progression 1000 ist, daher

$$1000 = 6 + (n - 1)\,6$$
$$1000 = 6n;$$

woraus $n = 166\frac{2}{3}$.

Es liegt demnach die Zahl zwischen dem 166. und 167sten Gliede, woraus folgt, daß 166 Zahlen von 1 — 1000 sich durch 6 theilen lassen.

5. Welche arithmetische Progression hat die Eigenschaft, daß ihr erstes Glied 5, die Summe aller Glieder = 1050, und die Summe der ersten Hälfte der Glieder = 275 ist?

Es ist hiebei $a = 5$, $s = 1050$; da aber das letzte Glied in der vollständigen Progression anders, als in der Hälfte derselben ist, so muß n und d gesucht werden. Weil aber $s = 1050$ und $a = 5$, so ist $[2a + (n - 1)\,d]\frac{n}{2} = s$, oder $[10 + (n - 1)\,d]\frac{n}{2} = 1050$, welche Formel sich für die Summe der ersten Hälfte aller Glieder dahin ändert, daß die Anzahl der Glieder $= \frac{1}{2}n$, und $s = 275$ ist. Man hat demnach die beiden Gleichungen:

$$[10 + (n - 1)\,d]\frac{n}{2} = 1050, \text{ oder } 10n + (n - 1)\,nd = 2100,$$

u. $$\frac{\left[10 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)d\right]\frac{1}{2}n}{2} = 275, \text{ oder } 5n + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)\frac{dn}{2}$$
$= 550$, woraus $d = 5$ und $n = 20$.

Die verlangte Progression ist demnach 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95 und 100.

6. Wie viele Glieder der Reihe 1, 9, 17, 25, 33 ... müssen genommen werden, um 540 zu erhalten?

Für den gegebenen Fall ist $a = 1$, $d = 8$, $s = 540$, n?

Da $z = a + (n - 1)\,d = 1 + (n - 1)\,8 = 8n - 7$ ist,

so ist $540 = \frac{n}{2}(8n - 6) = 4n^2 - 3n$, oder $n^2 - \frac{3n}{4} = \frac{540}{4}$,

woraus $n = 12$, da hier n nur einen positiven Werth haben kann; ein negativer Werth von n hätte angezeigt, daß durch ein allmähliges Addiren der Glieder nie 540 erhalten wird.

7. Bei einem Spiele bildeten die Preise eine arithmetische Progression: Es erhielt A für den 4ten und 7ten Preis zusammen

37, B für den 5ten und 9ten 46 fl., C bekam 23 fl., den wie vielten Preis erhielt er?

Der 4te und 7te Preis ist $(a + 3d) + (a + 6d) = 2a + 9d = 37$.

Deßgleichen der 5te und 9te $(a + 4d) + (a + 8d) = 2a + 12d = 46$; woraus $d = 3$, und $a = 5$ ist.

Hat nun C den xten Preis, so ist $a + (x - 1)d = 5 + (x - 1)3 = 23$, und $x =$ 7ten Preis.

8. Zwei Personen reisen zu gleicher Zeit von zwei Orten ab, die 114 Meilen von einander entfernt liegen, und zwar so, daß A den ersten Tag 4, und jeden kommenden 1 Meile mehr; B den ersten Tag 2, und jeden folgenden $\frac{2}{3}$ Meilen mehr macht. In wie viel Tagen begegnen sie sich?

Es geschehe in x Tagen, so macht der erste $[2a + (n - 1)d]\frac{n}{2}$

$= [8 + (x - 1)1]\frac{x}{2} = \frac{7x + x^2}{2}$, und der zweite

$\left(4 + (x - 1)\frac{2}{3}\right)\frac{x}{2} = \frac{5x + x^2}{3}$, daher $\frac{7x + x^2}{2} + \frac{5x + x^2}{3}$

$= 114$, oder $5x^2 + 31x = 684$, woraus $x = 9$.

Sie begegnen sich in 9 Tagen, nachdem der erste $\frac{(7x + x^2)}{2} =$

72, und der zweite $\frac{5x + x^2}{3} = 42$ Meilen zurückgelegt hat.

9. Welche arithmetische Progression, deren letztes Glied 49 ist, hat die Eigenschaft, daß die Anzahl aller Glieder das doppelte erste, und das erste Glied die doppelte Differenz um 1 übertrifft?

Der Aufgabe zufolge ist $a = 2d + 1$, und $n = 2a + 1 =$
$4d + 2 + 1 = 4d + 3$, daher
$49 = (2d + 1) + (4d + 2)d$
$49 = 2d + 1 + 4d^2 + 2d = 4d^2 + 4d + 1 = (2d + 1)^2$
$7 = 2d + 1$, oder $d = 3$; und daher $a = 7$ und $n = 15$.

10. Herkules fragte den Augias, wie viele Ochsen er habe? worauf dieser antwortete:

Alle befinden sich in 40 Ställen, so oft im ersten Stalle 3 stehen, so oft sind im zweiten 5, im dritten 7 u. s. w., im letzten aber 810.

Wie viel standen im ersten und wie viel in allen Ställen? Man erhält die Reihe $3x + 5x + 7x + \ldots$ 810, so daß also $a = 3x$, $d = 2x$, $z = 810$; folglich

$810 = 3x + 39 \cdot 2x$, woraus $x = 10$, mithin im ersten Stalle $3x = 30$ u. s. w., endlich ist $s = (30 + 810)\,20 = 16800$.

11. Der freie Fall der Körper bildet ebenfalls eine arithmetische Progression, indem aus der Erfahrung bekannt ist, daß ein Körper in der ersten Sekunde ohngefähr 15 Fuß, und in jeder folgenden 30′ mehr zurücklegt.

Es ist demnach für Aufgaben dieser Art immer $a = 15$, $d = 30$, so daß man nur eine der übrigen drei Größen zu wissen nöthig hat. z. B. wie hoch fällt ein Stein in 5 Sekunden? Hier ist $a = 15$, $d = 30$, $n = 5$, nnd da die Höhe die Summe aller durchlaufenen Fuße ist, so ist

$$s = \frac{5}{2}(30 + 4 \cdot 30) = \frac{5}{2} \cdot 150 = 375 \text{ Fuß.}$$

Wie lange braucht ein Stein von einer Höhe von 336′ herabzufallen? Hier ist $s = 336$, und n zu suchen

$$n = \frac{30 - 30}{60} + \sqrt{\frac{672}{30} + \left(\frac{30 - 30}{60}\right)^2} = \sqrt{22{,}4} =$$

4,73 . . . Sekunden.

Von den vieleckigen oder Polygonalzahlen.

111.

Ist das erste Glied einer arithmetischen Progression 1, so wird die Reihe nach §. 108

$= 1 + (1 + d) + (1 + 2d) + (1 + 3d) + (1 + 4d) + (1 + 5d) \ldots$

$1 + (n - 1)\,d$.

Nimmt man in dieser neuen Reihe die Summe von 1, 2, 3, 4 . . . Gliedern, so erhält man

$1,\ (2 + d),\ (3 + 3d),\ (4 + 6d),\ (5 + 10d),\ (6 + 15d),$

$(7 + 21d) \ldots n + \frac{n(n-1)\,d}{2} = \frac{n}{2}(dn - d + 2)$, welcher

Ausdruck die Summe von n Gliedern der obern Reihe nach §. 108 darstellt; diese Reihe gibt, wenn man der Ordnung nach statt d die Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . setzt

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 . . .	$\frac{n(n+1)}{2}$	III.
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 . . .	n^2	IV.
1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 . . .	$\frac{n(3n-1)}{2}$	V.
1, 6, 15, 28, 45, 66, 91 . . .	$n(2n-1)$	VI.
1, 7, 18, 34, 55, 81, 112 . . .	$\frac{n}{2}(5n-3)$	VII.
1, 8, 21, 40, 65, 96, 133 . . .	$n(3n-2)$	VIII.
1, 9, 24, 46, 75, 111, 154	$= \frac{n(7n-5)}{2}$	IX.
1, 10, 27, 52, 85, 126, 175	$= n(4n-3)$	X.
1, 11, 30, 58, 95, 141, 196	$= \frac{n(9n-7)}{2}$	XI.
1, 12, 33, 64, 105, 156, 217	$= n(5n-4)$	XII.

Man nennt diese Zahlen figurirte (allgemein Polygonalzahlen), da die Einheiten derselben (allenfalls) in Punkten gegeben, sich in reguläre Figuren ordnen lassen. So können aus den Zahlen der ersten Reihe Dreiecke, aus denen der zweiten Quadrate, der dritten Fünfecke, und so fort, 6, 7, 8 . . . Ecke gebildet werden, daher man auch die Zahlen selbst 3=, 4=, 5=, 6eckige (Triagonal=, Tetragonal=, Pentagonal=, Hexagonalzahlen ꝛc.) heißt. Die rechts stehenden römischen Ziffer bedeuten daher die Seitenzahl der Figuren.

Die hier zu erörternden Hauptfragen sind:

a) Wie läßt sich die allgemeine Formel für jede Polygonalzahl, so wie jede einzelne bestimmte Polygonalzahl selbst finden.

b) Ob und zu welcher Art dieser Zahlen eine gegebene Zahl gehört.

Aus obiger Zusammenstellung sieht man, daß die Triangularzahlen entstehen, wenn $d = 1$, die Tetragonalzahlen, wenn $d = 2$, die Pentagonal=, Hexagonalzahlen ꝛc., wenn $d = 3, 4 \ldots$ ist, also überhaupt die meckigen Zahlen aus der Reihe sich bilden, wo $d = m - 2$ ist. Es geht daher die allgemeine Formel

$$s = \frac{n}{2}(dn - d + 2) \text{ für } d = m - 2 \text{ in } \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$$

über, und da n unabänderlich nur den Index irgend einer bestimmten Polygonalzahl bedeutet, so bietet diese Formel keine Schwierigkeit im Gebrauche mehr dar.

Welches ist der allgemeine Ausdruck für die 15eckigen Zahlen, und wie heißt die 5te derselben?

$$s = \frac{13n^2 - 11n}{2}, \text{ woraus für die 5te } (n = 5)$$

$$s = \frac{325 - 55}{2} = 135 \text{ wird.}$$

Von welchen Polygonalzahlen ist 55 die fünfte?

Es ist $s = 55$ und $n = 5$

$$55 = \frac{(m - 2)25 - (m - 4)5}{2}$$

$$110 = 25m - 50 - 5m + 20$$

$$110 + 50 - 20 = 20m.$$

$7 = m$, d. h. 55 ist die fünfte 7eckige Zahl.

Um zu erfahren, ob und von welcher Art der Polygonalzahlen eine gegebene Zahl sei, darf man sie nur den allgemeinen Formeln dieser Zahlen allmählig gleich setzen; findet sich dabei der Werth von n in ganzen Zahlen, so ist die Zahl Polygonalzahl derselben Art, für welche die Formel den Werth von n in einer ganzen Zahl angab, und die Figur hat so viel Punkte in einer Seite, als n werth ist.

Aufgabe: Ist 15 Polygonalzahl, und was für eine?

Setzt man 15 den einzelnen Ausdrücken der Polygonalzahlen allmählig gleich, so findet man, daß für n aus der Formel der Triangular- und Hexagonalzahlen die Werthe 5 und 3 hervorgehen, 15 also die 5te Triangular- und 3te Hexagonalzahl ist; d. h. das aus 15 Punkten gebildete Dreieck hat 5, und das aus 15 Punkten gebildete Sechseck 3 Punkte in jeder Seite.

Die Summe von beliebig viel (n) meckigen Zahlen drückt die Formel

$$s = \frac{(5 - m)n + 3n^2 + (m - 2)n^3}{6} \text{ aus.}$$

Nimmt man von den Polygonalzahlen jeder Art wieder die Summe von 1, 2, 3, 4... Glieder, oder was dasselbe ist, setzt man in die Summenformel der Polygonalzahlen für n die natürlichen Zahlen, und für m der Ordnung nach 3, 4, 5, 6..., so erhält man

1, 4, 10, 20, 35, 56 . . .	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	III.
1, 5, 14, 30, 55, 91 . . .	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	IV.

1, 6, 18, 40, 75, 126 . . . $\frac{n^2 . (n+1)}{1 . 2}$ V.

1, 7, 22, 50, 95, 161 . . . $\frac{n(n+1)(4n-1)}{1 . 2 . 3}$ VI.

u. s. w., welche Zahlen Pyramidalzahlen heißen, da die Einheiten als Körper, allenfalls durch Kugeln, dargestellt, 3, 4, 5 . . . seitige Pyramiden bilden, je nachdem man die Glieder der 3, 4, 5 . . . eckigen Zahlen addirt.

Die Formel (IV) gibt die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen.

Wie groß ist die Summe der Quadrate der Zahlen von 10 exclusive bis 20 inclusive?

Die 20 ersten Quadrate sind $= \frac{20 . 21 . 41}{6} = 2870$, die ersten 10 $= \frac{10 . 11 . 21}{6} = 385$; mithin die Quadrate von 11 — 20 $= 2870 - 385 = 2485$.

Von den geometrischen Progressionen.

112.

Aus dem allgemeinen Ausdruck jeder geometrischen Reihe

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots$$

lassen sich ebenfalls zwei Hauptgleichungen, eine für das letzte Glied und eine für die Summe der Progression entwickeln.

Da nemlich jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplication mit dem Exponent (q) entsteht, q aber erst im zweiten Gliede eintritt, so ist der Exponent von q jedesmal um 1 kleiner, als der Index des Gliedes, folglich, wenn die Reihe n Glieder hat, (n—1), und wenn daher das letzte Glied wieder mit z bezeichnet wird

$$z = aq^{n-1}. \quad (I)$$

Das letzte oder allgemeine Glied einer geometrischen Progression ist gleich dem Produkte des ersten Gliedes in jene Potenz des Quotienten, die um eine Einheit kleiner ist, als der Index des Gliedes.

Multiplicirt man

$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots aq^{n-2} + aq^{n-1}$ mit q, so erhält man

$sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \ldots aq^{n-1} + aq^n$,
zieht man erstere Reihe von letzterer ab, so bleibt $sq - s = aq^n - a$,

woraus $s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{(q^n - 1)a}{q - 1}$ (II)

Die Summe einer geometrischen Progression von n Glieder ist gleich dem Produkte der um 1 verminderten nten Potenz des Exponenten in das erste Glied, dividirt um den um 1 verminderten Exponent.

Da $z = aq^{n-1}$, und $qz = aq^n$, so ist auch $s = \frac{qz - a}{q - 1}$.

Diese beiden Hauptformeln enthalten wieder die 5 bei jeder Progression vorkommenden Größen, so daß zur Auffindung einer derselben 3 bekannt sein müssen.

113.

Obwohl das Verfahren, aus drei gegebenen eine der beiden übrigen zu finden, in der Hauptsache mit dem §. 109 angegebenen übereinkommt, so ist doch die Darstellung der Formeln nicht so einfach, als bei den arithmetischen, indem mehrere mit Hilfe der Logarithmen, entweder bequemer, oder nur allein auf diese Art entwickelt werden, einige davon auf höhere Gleichungen führen. Es ist daher nöthig, den Gang dieser Entwicklung im Allgemeinen, und für die schwierigern Fälle im Einzelnen zu zeigen. Da bei jeder hieher gehörigen Aufgabe 3 Größen als bekannt, und 1 als unbekannt gegeben sind, so haben wir folgende 5 Gleichungen aufzustellen:

1 Gleichung für a, q, n, z
1 » » a, q, n, s
1 » » a, q, z, s
1 » » a, z, n, s
1 » » q, z, n, s.

Die erste derselben ist die Formel für das letzte Glied selbst $z = aq^{n-1}$, woraus leicht die Werthe von a, q und n gefunden werden. Ebenso ist die 2te Gleichung durch die Summenformel gegeben $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$, woraus a und n leicht, q aber nicht unmittelbar, sondern nur als unbekannte einer Gleichung vom nten Grade zu bestimmen ist; denn aus $s = \frac{(q^n - 1)a}{q - 1}$ folgt $sq - s = aq^n - a$, und hieraus

$aq^n - sq + s - a = 0$, oder $q^n - \frac{sq}{a} + \frac{s-a}{a} = 0$.

Die 3te Gleichung ist ebenfalls schon entwickelt $s = \frac{qz-a}{q-1}$, woraus a, q und z gar leicht zu bestimmen sind.

Die Gleichung für a, z, n, s herzustellen, suche man den Werth von q aus $z = aq^{n-1}$ und $s = \frac{qz-a}{q-1}$, so erhält man $q = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$ und $q = \frac{s-a}{s-z}$, folglich auch $\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} = \frac{s-a}{s-z}$, oder

$$\frac{\log. z - \log. a}{n-1} = \log. (s-a) - \log. (s-z),$$ woraus

$$n = \frac{\log. z - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-z)} + 1.$$

Ferner ist $\frac{\sqrt[n-1]{z}}{\sqrt[n-1]{a}} = \frac{s-a}{s-z}$, oder $(s-z)\sqrt[n-1]{z} = (s-a)\sqrt[n-1]{a}$, und zur $(n-1)$ten Potenz erhoben $(s-z)^{n-1}z = (s-a)^{n-1}a$ die Gleichung für a und z, so daß also a und z als unbekannte einer höhern Gleichung erscheinen. Da $\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} = \frac{s-a}{s-z}$ einerlei ist mit $(s-z)z^{\frac{1}{n-1}} = (s-a)a^{\frac{1}{n-1}}$, und diese mit $sz^{\frac{1}{n-1}} - sa^{\frac{1}{n-1}} =$

$s\left(z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}\right) = z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}$, so ist $s = \frac{z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$.

Die Gleichung zwischen q, z, n, s endlich findet man, wenn man die Werthe von a aus $z = aq^{n-1}$ und $s = \frac{qz-a}{q-1}$ mit einander verbindet, und da $a = \frac{z}{q^{n-1}}$ und $a = qz - s(q-1)$, so erhält man $\frac{z}{q^{n-1}} = qz - s(q-1)$, woraus $z = \frac{q^{n-1}(q-1)s}{q^n - 1}$ und $s = \frac{(q^n-1)z}{q^{n-1}(q-1)}$.

Aus $\frac{z}{q^{n-1}} = qz - s(q-1)$ folgt $\frac{z}{qz - s(q-1)} =$
q^{n-1}, und $\log. z - \log. (qz - s(q-1) = (n-1) \log. q$,
woraus $n = \frac{\log. z - \log. [qz - s(q-1)]}{\log. q} + 1.$

Auch folgt aus obiger Gleichung $(s - z) q^n - sq^{n-1} + z = 0$,
oder $q^n - \frac{sq^{n-1}}{s-z} + \frac{z}{s-z} = 0$, so daß also q nur wieder als unbekannte einer Gleichung vom nten Grad dargestellt werden kann.

Die 20 Formeln heißen demnach:

?	Gegeben.	Formeln.
a	n q z	$= \frac{z}{q^{n-1}}.$
	q z s	$= qz - (q-1)s.$
	q n s	$= \frac{(q-1)s}{q^n - 1}.$
	n z s	$= a(s-a)^{n-1} - z(s-z)^{n-1} = 0.$
n	a z q	$= \frac{\log. z - \log. a}{\log. q} + 1.$
	a q s	$= \frac{\log. [a + (q-1)s] - \log. a}{\log. q}.$
	a z s	$= \frac{\log. z - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-z)} + 1.$
	q z s	$= \frac{\log. z - \log. [qz - (q-1)s]}{\log. q} + 1.$
q	a z n	$= \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}.$
	a z s	$= \frac{s-a}{s-z}.$
	a n s	$= q^n - \frac{sq}{a} + \frac{s-a}{a} = 0.$
	z n s	$= q^n - \frac{s}{s-z} q^{n-1} + \frac{z}{s-z} = 0.$

?	Gegeben.	Formeln.
z	a q n	$= aq^{n-1}$.
	a q s	$= \frac{a + (q - 1)s}{q}$.
	a n s	$z(s - z)^{n-1} - a(s - a)^{n-1} = 0$.
	q n s	$= \frac{sq^{n-1}(q - 1)}{q^n - 1}$.
s	a q z	$= \frac{zq - a}{q - 1}$.
	a q n	$= \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$.
	a n z	$= \frac{z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$.
	q n z	$= \frac{(q^n - 1)z}{q^{n-1}(q-1)}$.

Zur Uebung in der Auflösung dieser Formeln können nachstehende Angaben dienen, mit denen es sich gerade, wie bei den arithmetischen verhält:

a.	q.	n.	z.	s.
1,	2,	7,	64,	127.
3,	4,	8,	49152,	65535.
$\frac{1}{64}$,	3,	8,	$34\frac{11}{64}$,	$51\frac{1}{4}$.
2,	3,	8,	4374,	6560.

114.

Ist in einer geometrischen Progression $a = 1$, so wird die Summenformel $s = \frac{q^n - 1}{q - 1}$, woraus folgt, daß jede Potenz einer Zahl um 1 vermindert, die um 1 verkleinerte Zahl als Faktor enthält.

Für $a = q$ ist $s = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}$.

Für $q = 1$ werden alle Glieder der Progression gleich, und die Summenformel geht über in $\frac{(1 - 1)}{1 - 1} a = \frac{a \cdot 0}{0}$; ein Ausdruck der Unbestimmtheit, dessen Werth jedoch hier leicht anzugeben ist, in-

dem eine solche Reihe das Product des ersten Gliedes in die Anzahl der Glieder, d. h. = an ist.

Ist $q < 1$, so wird $(q^n - 1)$, und $(q - 1)$ negativ, folglich s dennoch wieder positiv. Man kann aber auch

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1} \times \frac{-1}{-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

setzen. Für ein negatives q wechseln die Glieder einer geometrischen Reihe so ab, daß alle ungeraden positiv, die geraden negativ sind, und es wird $z = \pm aq^{n-1}$, und $s = \frac{(\pm q^n + 1)a}{q + 1}$, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Die Summe einer geometrischen Progression, worin $q > 1$ wächst sehr bald zur einer ungeheuren Zahl, wie folgendes Beispiel zeigt:

Selâhò ddîn Mohammed Alséphahi, ein arabischer Schriftsteller, erklärt in seinen Commentarien über das Gedicht „Lamiato l'Ajam" den Indianer Sessa Ebn Daher als den Erfinder des Schachspiels, der sich, vom Könige Shehram aufgefodert, zur Belohnung so viel Waizen erbeten habe, als die Summe betragen werde, wenn er für das erste der 64 Felder 1 Korn, und für jedes folgende die doppelte Anzahl Körner erhielte, welche Bitte der König als Verachtung seiner Gnade anfangs betrachtete, bis er belehrt wurde, daß der Waizen der ganzen Erde nicht hinreiche. Man erhält nemlich

$$s = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 18''',446744'',073709',551615 \text{ Körner,}$$

ohngefähr 2'',813852'405000 bayerische Schäffel, welche, das Schäffel zu 10 fl., die Summe von circa 30 Billionen fl. ausmachen, welche Summe auf der ganzen Erde nicht vorhanden ist. Das ganze Festland der Erde wäre nach einer mäßigen Berechnung in 70 Jahren kaum im Stande, dasselbe hervorbringen, und es aufzubewahren, wären ohngefähr 150,000 Kornböden, deren jeder 1 Stunde lang und breit, und 20 Fuß hoch ist, nöthig; diese Böden zu füllen, würden 7700 Jahre nicht hinreichen, wenn auch alle Tage eine Million Schäffel beigeschafft würden.

Sollen zwischen 2 auf einander folgenden Gliedern einer geometrischen Reihe (oder 2 Größen überhaupt) a und b, m Glieder eingeschaltet werden, so daß die ganze Reihe wieder eine geometrische Pro-

gression bildet, so ist hier $a = a$, $n = m + 2$, $z = b$ und q zu suchen, folglich $q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$, und daher die Reihe unter der Form

$$a + a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} + a\sqrt[m+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} + \ldots a\sqrt[m+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^m} + b$$

gegeben. z. B. zwischen 2 und 486 sollen 4 Glieder eingeschaltet werden, so ist $q = \sqrt[5]{\frac{486}{2}} = \sqrt[5]{243} = 3$, mithin die Reihe $= 2, 6, 18, 54, 162, 486.$

Ist in einer geometrischen Reihe n ein unächter Bruch, z. B. $\frac{43}{8} = 5\frac{3}{8}$, so bedeutet dieß, daß die Reihe 5 Glieder, und noch $\frac{3}{8}$ vom 6ten aber in der Art habe, daß das 6te Glied wieder in 8 Theile, die unter sich eine geometrische Progression bilden, getheilt sei, und 3 solche Theile genommen sind. Denn wenn die Glieder einer Reihe in geometrischer Progression steigen, so müssen auch die Theile derselben, in derselben Ordnung fortschreiten. Die Summenformel bleibt dieselbe, nur muß (meistens) q^n logarithmisch berechnet werden. z. B.

Ein Diamant, der $3\frac{3}{4}$ Karat wiegt, wird für den ersten Karat mit 30 fl., und für jeden folgenden viermal theurer bezahlt, wie hoch kommt derselbe?

Da hier $a = 30$, $q = 4$, $n = 3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$, so ist

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{30\left(4^{\frac{15}{4}} - 1\right)}{3} = 10\left(4^{\frac{15}{4}} - 1\right),$$ nun ist

$$\log. 4^{\frac{15}{4}} = \frac{15}{4} \log. 4 = 2{,}257725,$$

und hiefür 181,02 die Zahl, daher kostet der Diamant 10.(181,02—1) $=$ 1800,2 fl., 3 Karat hätten 630, und der 4te 1920 fl. gekostet, wovon 3 Viertel 1440 fl. betragen, hiemit der Preis des Steines 2070 fl. wäre, was um 269,8 fl. zu viel ist, weil das letzte Viertel viel theurer, als jedes der drei ersten ist.

Nachstehende Aufgaben überlassen wir dem Nachdenken des Schülers:

1) Ein Pferdhändler wollte seine Pferde so verkaufen, daß er für das erste nur 5 kr., für das zweite 20 kr. u. s. w., stets viermal so viel für das nächstfolgende, und 1365 fl. 20 kr. für das letzte erhalte. Wie viel hatte er Pferde?

   8 Pferde.

2) In einem Lande vermehrte sich die Volksmenge alle Jahre in einem immer gleichen Verhältniß, und so war die Seelenzahl in 4 Jahren von 10000 auf 14641 angewachsen. Um welchen Theil nahm die Volksmenge jährlich zu?

   Um den 10ten.

3) Es gibt 7 Zahlen, die eine geometrische Progression bilden, und von denen die ersten 6 = $157\frac{1}{2}$, und die letzten 6 aber = 315 betragen. Wie heißen diese Zahlen?

   $2\frac{1}{2}$, 5, 10, 20, 40, 80, 160.

4) Eine Rente trug das erste Jahr 5 fl., in jedem folgenden ein Vielfaches des vorigen Jahres, und im achten Jahre 10935 fl. Wie vielfach wurde sie in jedem folgenden Jahre bezahlt, und was war der Totalbetrag?

   Sie wurde dreifach bezahlt, und betrug im ganzen 16400 fl.

115.

Jede Progression läßt sich nach beiden Seiten hin, ins unendliche fortsetzen. Daher wird eine arithmetische oder geometrische steigende Progression ins unendliche fortgesetzt, eine unendlich große Summe haben, so wie die Summe jeder fallenden unendlichen arithmetischen Reihe unendlich groß aber negativ ist, da die positiven Glieder als endliche Summe bei der ins unendliche fortgesetzten Abnahme gegen die negativen verschwinden. Aus letzterem folgt, daß eine nach beiden Seiten hin ins unendliche fortgesetzte arithmetische Progression = 0 ist.

Die Summe einer ins unendliche fallenden geometrischen Progression ist endlich, und also durch Zahlen darstellbar, da, je weiter die Reihe fortgesetzt wird, die Glieder desto kleiner, und wenn die Reihe ins unendliche forgesetzt wird, selbst unendlich klein, d. i. durch

Zahlen gar nicht mehr darstellbar = 0 werden. Ist daher q ein Bruch, $n = \infty$, so ist $z = 0$ und $s = \frac{qz - a}{q - 1} = \frac{0 - a}{q - 1} = \frac{-a}{q-1} \times \frac{-1}{-1} = \frac{a}{1 - q}$. z. B.

$$s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} \ldots \frac{ab^{n-1}}{c^{n-1}} = \frac{(b^n - c^n)a}{(b - c)c^{n-1}}.$$

Ist selbe aber unendlich, so ist

$$s = \frac{a}{1 - q} = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}} = \frac{ac}{c - b}.$$

$$s = \frac{c}{b} + \frac{c}{b^2} + \frac{c}{b^3} + \frac{c}{b^4} + \ldots\ldots = \frac{c}{b - 1}, \text{ nemlich}$$

$$a = \frac{c}{b} \text{ und } q = \frac{1}{b}.$$

$$s = \frac{c}{b} - \frac{c^2}{b^2} + \frac{c^3}{b^3} - \frac{c^4}{b^4} + - \ldots = \frac{c}{b + c}, \text{ nemlich}$$

$$a = \frac{c}{b} \text{ und } q = -\frac{c}{b}.$$

$$s = c - b + \frac{b^2}{c} - \frac{b^3}{c^2} + \frac{b^4}{c^3} - \ldots = \frac{c^2}{c + b}, \text{ nemlich}$$

$$a = c \text{ und } q = -\frac{b}{c}.$$

Es ist daher auch

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2 - 1} = 2.$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2 - 1} = 1.$$

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \frac{2}{243} + \ldots = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3 - 1} = 1.$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243} - \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}.$$

Zur Uebung wie oben:

a,	q,	n,	z,	s
1,	$\frac{1}{8}$,	∞,	0,	$\frac{8}{7}$
40,	$\frac{3}{7}$,	∞,	0,	70
9,	$\frac{2}{3}$,	∞,	0,	27.

Hieher gehört auch die Summation der unendlichen Decimalbrüche, da selbe unendliche abnehmende geometrische Progressionen bilden. z. B.

$$0{,}030303 \ldots = \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{1000000} + \ldots =$$

$$\frac{3}{100} + \frac{3}{100^2} + \frac{3}{100^3} + \ldots, \text{ wo also}$$

$$a = \frac{3}{100}, \text{ und } q = \frac{1}{100}, \text{ also}$$

$$s = \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{3}{100} : \frac{99}{100} = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}.$$

$$0{,}83333 \ldots = \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots =$$

$$a = \frac{3}{100}, \text{ und } q = \frac{1}{10},$$

und die Summe der unendlichen Decimalstellen

$$s = \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{100} : \frac{9}{10} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30},$$

wozu also noch $\frac{8}{10}$ addirt werden muß, daher

$$0{,}83333 \ldots \frac{8}{10} + \frac{1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

$$0{,}00621621621 \ldots = \frac{621}{100{,}000} + \frac{621}{100{,}000{,}000} + \frac{621}{100{,}000{,}000{,}000} + \ldots$$

$$a = \frac{621}{100{,}000}, \text{ und } q = \frac{1}{1000}.$$

$$s = \frac{\frac{621}{100000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{621}{100000} : \frac{999}{1000} = \frac{621}{99900} = \frac{23}{3700}.$$

Zur Uebung die unendlichen Decimalbrüche §. (39.).

Der Satz: daß die Summe einer unendlich abnehmenden geometrischen Reihe eine endliche Größe sei, entkräftet das bekannte Sophisma des Zeno, der Achilles genannt, welchem zufolge Achilles eine Schildkröte, welche ein Stadium voraus wäre, nie erreichen könnte, obwohl er zehnmal schneller als die Schildkröte liefe. Denn hat Achilles das Stadium Weg zurück gelegt, so ist die Schildkröte um $\frac{1}{10}$ Stadium voraus; und während Achilles dies $\frac{1}{10}$ durchläuft, ist die Schildkröte um $\frac{1}{100}$ Stadium vorgerückt, u. s. f., also kann Achilles die Schildkröte nie erreichen. Da wir aber mit den Augen sehen, daß er sie erreicht, so ist alle Sinnenwahrnehmung Trug. (sagt Zeno.)

Die Annäherung des Achilles zur Schildkröte bildet aber die geometrische Reihe

$$= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots \frac{1}{10\infty} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}.$$

Stadium für die Entfernung des Punktes, von wo Achilles ausging, bis zum Punkte des Zusammentreffens. Für jeden Weg des Achilles, der $> 1\frac{1}{9}$ Stadium ist, ist Achilles der Schildkröte schon voraus.

Der Irrthum des Sophisten liegt also darin, daß er die Summe einer unendlichen Menge von Größen selbst für unendlich groß hielt,

was, wenn es auch manchmal richtig ist, doch nie eintrifft, wenn die Größen eine abnehmende geometrische Reihe bilden. Der Schein der Wahrheit aber besteht darin, daß Achilles allerdings eine unendliche Menge Entfernungen durchlaufen, und daher auch eine unendliche Menge von Zeittheilchen brauchen muß, welche beide aber die Form einer abnehmenden geometrischen Reihe annehmen, folglich, wenn auch an Anzahl unendlich, doch eine endliche Summe haben.

Die Elemente der Combinationslehre.

116.

Die Combinationslehre ist die mathematische Lehre von der Mannigfaltigkeit in der Zusammenstellung gegebener Dinge, die man hier Elemente nennt, so wie jeder Ausdruck, der verbundene Elemente enthält, eine Complexion genannt wird.

Die Bezeichnung der Elemente geschieht gewöhnlich durch Buchstaben oder Ziffer, wobei es sich jedoch von keiner bestimmten arithmetischen Verbindung der Elemente, sondern nur um das bloße Aneinanderreihen derselben handelt.

Wird in einer Complexion dasselbe Element wiederholt, so drückt man die Wiederholung durch den Exponent aus, wie bei Producten, und heißt selbe Wiederholungs-Exponenten. z. B.

$$aaabbcccccd = a^3b^2c^4d.$$

Sind in der Complexion die Elemente nach ihrer natürlichen Folge aneinander gereiht, so heißt sie gut geordnet; abc, 1 3 5.

Eine Complexion heißt von der so vielten Classe, so viel Elemente in derselben sich befinden, Complexionen der ersten Classe heißen Unionen, der zweiten Binionen (auch Amben), der dritten Ternionen (auch Ternen), der vierten Quaternionen, der fünften Quinionen u. s. w.

Complexionen heißen identisch, wenn sie gleiche und gleich viele Elemente enthalten, materiell verschieden, wenn sie nicht gleich viele oder nicht dieselben Elemente enthalten, formell verschieden, wenn zwar dieselben Elemente aber in verschiedener Folge vorkommen.

Je nachdem endlich gleich viele, wenn auch nicht dieselben, Elemente oder nicht vorhanden sind, heißt man die Complexionen gleichartig oder ungleichartig.

Zur Darstellung aller Arten von Complexionen gegebener Ele-

mente, bedient sich die Combinationslehre dreier Operationen, welche die Namen Permutiren, Combiniren und Variren führen.

Es handelt sich daher darum:

1) die Regel aufzustellen, nach der alle Complexionen gefunden, und zweckmäßig geordnet werden können;

2) eine Formel aufzufinden, durch welche sich die Anzahl der möglichen Complexionen bestimmen läßt.

Da ersteres eigentlich nicht in die Mathematik gehört, so ist es auch hier übergangen, und verweise hiefür auf die dargestellten Complexionen und auf die Entwicklung der zugehörigen Formeln, woraus das Gesetz der Bildung deutlich gemacht ist.

117.

Gegebene Elemente permutiren, heißt die Complexion, welche alle diese Elemente enthält, in Rücksicht auf die Ordnung ihrer Elemente unter jeder möglichen Form darstellen. Man deutet das Permutiren durch ein vorgesetztes P an, und soll die Anzahl der Permutationen angegeben werden, durch nP.

1 Element . . a.
2 Elemente . . ab, ba.
3 » . . abc, acb, bac, bca, cab, cba.
4 » . . abcd, bacd, cabd, dabc.
abdc, badc, cadb, dacb.
acbd, bcad, cbad, dbac.
acdb, bcda, cbda, dbca.
adbc, bdac, cdab, dcab.
adcb, bdca, cdba, dcba.

u. s. w. Es ergibt sich hieraus, daß ein Element nur eine Stellung annehmen kann. Ein 2tes aber kann vor und nach dem ersten stehen, also ist nP(ab) = 1 . 2 = 2. Ein 3tes kann in jeder der beiden Complexionen von 2en 3 Stellen einnehmen, vorn, mitten und hinten, und vermehrt die 2 Complexionen um das dreifache, folglich nP(abc) = 1 . 2 . 3 = 6. Eben so nimmt ein 4tes in jeder der 6 Versetzungen 4 Stellungen ein, vermehrt also die 6 Permutationen um das vierfache, mithin nP(abcd) = 1 . 2 . 3 . 4 = 24. Und so vermehrt jedes neu dazukommende Element die Anzahl der Permutationen um das so vielfache, als die Anzahl aller Elemente

beträgt, daher ist nP aus m Elementen gleich dem Producte der natürlichen Zahlenreihe von 1 — m. z. B. 10 verschiedene Elemente lassen 1 . 2 . 3 . . . 10 = 3,628800 Permutationen zu, woraus hervorgeht, daß die Anzahl der Permutationen auch bei einer mäßigen Anzahl von Elementen schon sehr beträchtlich ist. So geben die 24 Buchstaben des Alphabets 1 . 2 . 3 . 4 . . . 24 = 620,448'''401733''239439'360000 Permutationen, welche alle Menschen auf der Erde in 1000 Millionen Jahren zu schreiben nicht im Stande wären, wenn jeder täglich mehr als 1500 schreiben würde.

Sind unter den zu permutirenden Elementen gleiche vorhanden, so geschieht zwar die Bildung auf dieselbe Weise, aber die Anzahl der Permutationen wird vermindert.

aa, so wie aaa, aaaa, d. h. lauter gleiche Elemente lassen nur eine Stellung zu.

nP(aab) = 3, nemlich aab, aba, baa, wären die Elemente verschieden, so hätte man 6 Permutationen, sind also 2 davon gleich, so gibt es nur $\frac{1 . 2 . 3}{1 . 2} = 3$.

nP(aaab) = 4, aaab, aaba, abaa, baaa. 4 Ungleiche aber 1 . 2 . 3 . 4 = 24. Sind also 3 gleich, so erhält man $\frac{1 . 2 . 3 . 4}{1 . 2 . 3} = 4$.

Eben so geben 5, worunter 4 gleich sind $= \frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5}{1 . 2 . 3 . 4}$ = 5. und m Elemente, worunter n gleiche sind $= \frac{1 . 2 . 3 . . . m}{1 . 2 . 3 . . . n}$ Permutationen, d. h. die Anzahl der Permutationen wird durch gleiche Elemente um das so vielfache vermindert, als die gleichen Elemente Permutationen enthielten, wenn sie verschieden wären. Kommen also mehrmal gleiche Elemente in einer zu permutirenden Complexion vor, so wird die Anzahl der Permutationen durch jede Art der gleichen Elemente auf dieselbe Weise vermindert. Es geben demnach

$$aabbbc = a^2b^3c = \frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}{1 . 2 . 1 . 2 . 3} = 60.$$

$$a^m = 1,\ a^{m-1}b = m,\ a^{m-2}b^2 = \frac{m . (m - 1)}{1 . 2}.$$

Sind unter den Elementen einer zu permutirenden Complexion einige gar nicht versetzbar, so ist dies so viel, als wenn selbe nicht vorhanden wären, und die Anzahl der Permutationen der Versetzungszahl der veränderlichen ganz gleich.

So ist nP(abcd), wenn a stets dieselbe Stelle behalten soll = nP(bcd) = 6, sind a und b nicht versetzbar, so ist nP(abcd) = nP(cd) = 2 u. s. w.

So gibt es unter den Permutationen von abcdefg, 720, welche mit einem der vorkommenden Elemente beginnen, 120, die mit ab, 24 welche mit abc, und 6, die mit abcd anfangen, 24, worin die Buchstaben abcd stets beisammen bleiben, und 576, wenn diese 4 zwar bei einander stehen, aber unter sich wieder permutirt werden sollen.

Von $a^3b^5c^4$ fangen 504 Permutationen mit c^3, und 140 mit a^2b^2c an.

Die Wahrscheinlichkeit, von allen Permutationen von $a^3b^5c^4$, welche auf Zettel geschrieben, in eine Urne gelegt würden, eine herauszu ziehen, die mit c^3 anfängt, ist also, da $nP(a^3b^5c^4) = 27720$, worunter 504 mit c^3 anfangen $= \frac{504}{27720} = \frac{1}{55}$.

Auch werden die Permutationen zur Bildung von Anagrammen, d. h. solchen Buchstaben-Versetzungen, wodurch ein oder mehrere neue Wörter aus gegebenen gebildet werden, angewendet. So findet man unter den Permutationen von roma die Anagramme ramo, maro, omar, mora, armo, amor und oram.

118.

Sollen aus einer Anzahl Elemente alle möglichen Complexionen von je 1, 2, 3, 4 . . . Elementen gebildet werden, so daß die einzelnen Verbindungen stets andere Elemente enthalten, so heißt man diese Complexionen die Combinationen der gegebenen Elemente, und die Art und Weise selbe zu bilden, Combiniren.

Man unterscheidet hiebei Combinationen ohne und mit Wiederholungen:

a. Combinationen ohne Wiederholung sind der Inbegriff der Complexionen von je 1, 2, 3, 4 . . . Elementen, die sämmtlich materiell verschieden sind.

Wir wollen die Combinationen ohne Wiederholungen mit $Co^{1,2,3..}$, und die mit Wiederholungen mit $Cm^{1,2,3..}$ anzeigen, wo $^{1,2,3..}$ die Classen bezeichnen.

So sind $Co^{1,2,3,4}$ (abcd).

$Co^1 =$ a, b, c, d und $Co^1(n) = n$.

$Co^2 =$ ab, ac, ad, bc, bd, cd „ $Co^2(n) = \frac{n.(n-1)}{1.2}$.

$Co^3 =$ abc, abd, acd, bcd „ $Co^3(n) = \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$.

$Co^4 =$ abcd „ $Co^4(n) = \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$.

$$Co^m(n) = \frac{n.(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{1.2.3.4...m}.$$

Jedes Element gibt nemlich eine Union, also n Elemente n Unionen. Jedes der n Elemente kann mit den übrigen (n — 1) verbunden werden, woraus also n . (n — 1) Amben entstehen. Da aber dabei jede zweimal, nur versetzt, vorkommt, die Combinationen keine Permutationen zulassen, so ist die eigentliche Zahl der Amben $\frac{n.(n-1)}{1.2}$. Verbände man wieder jede Binion oder Ambe mit den übrigen (n — 2) Elementen zu Ternen, so erhielte man $\frac{n.(n-1)}{1.2}$ (n — 2) aber jede würde wieder dreimal vorkommen, (wie abc, cba, acb), daher muß noch mit 3 getheilt werden, woraus man $\frac{n.(n-1)}{1.2}\frac{(n-2)}{3}$ erhält, u. s. w.

Es kann demnach nie mehr Classen geben, als Elemente vorhanden sind, und die höchste Classe enthält nur eine Complexion, die Verbindung aller Elemente.

Nach §. 65. ist $(1+1)^n = 1 + n + \frac{n.(n-1)}{1.2} + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + ...$

welche Reihe um eins vermindert, die sämmtlichen Classen der Combinationen ohne Wiederholung von n Elementen enthält.

Folglich enthalten n Elemente nach allen Classen combinirt

$(1 + 1)^n - 1 = 2^n - 1$ Complexionen. z. B. 4 Elemente $= 2^4 - 1 = 15$, wie oben zu ersehen ist.

Hieher gehört die Beantwortung der Frage: wie viele Spiele zu je 1, 2, 3, 4, 5 Nummern enthält die gewöhnliche Zahlenlotterie, welche bekanntlich 90 Nummern hat, und wie viele von den möglichen Spielen müssen gewinnen, da jedesmal 5 Nummern gezogen werden?

Da die möglichen Spiele mit 1, 2, 3, 4, 5 Nummern nichts anderes als die Combinationen ohne Wiederholung in der 1, 2, 3, 4, 5ten Classe sind, so erhält man 90 Spiele mit einer Nummer, $\frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005$ mit 2 (Amben), $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480$ Ternen, $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2555190$ Quaternen, $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ $= 43{,}949268$ Quinternen. Von diesen müssen gewinnen 5 Spiele mit einer Nummer, $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ mit 2 (Amben) $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ Ternen, $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$ Quaternen, und $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ $= 1$ Quintern.

Die Wahrscheinlichkeit des Errathens von

einer Nummer ist demnach 5 : 90 $= \frac{1}{18}$.

2 Nummern » » 10 : 4005 $= \frac{2}{801}$.

3 » » » 10 : 117480 $= \frac{1}{11748}$.

4 » » » 5 : 2555190 $= \frac{1}{511038}$.

5 » » » 1 : 43949268 $= \frac{1}{43949268}$.

Man sieht hieraus, daß bei jährlichen 36 Ziehungen, und unter der Voraussetzung, daß jedesmal andere Nummern zum Vorschein kommen, es möglich ist erst in $\frac{1}{2}$ Jahr eine, in $10\frac{1}{8}$ Jahren zwei, in $326\frac{1}{3}$ Jahren drei, in $14195\frac{1}{2}$ Jahren vier, und in 1220813 Jahren fünf Nummern zu errathen.

Eben so läßt sich das Verhältniß des Einsatzes zum Gewinn

bestimmen, da das Errathen einer Nummer mit dem 15fachen Einsatz, das Errathen zweier mit dem 270fachen, das von drei mit dem 5400fachen, und das von vier mit dem 60,000fachen Einsatz bezahlt wird. z. B. beim Extract-Spiel ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{18}$, und da das Errathen 15mal bezahlt wird, das Erhaltene $\frac{15}{18}$ des Einsatzes, mithin $\frac{3}{18} = \frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}$ p/o Verlust. Bei Amben $\frac{2}{801} \times 270 = \frac{60}{89}$ des Einsatzes, mithin $\frac{29}{89} = 32\frac{52}{89}$ p/o Verlust u. s. w.

Auch ergibt sich die Bestimmung der Einsätze für jedes Spiel von beliebig viel Nummern. Kostet der Extract für 1 Nummer n, so muß er für m Nummern mn kosten, da m Nummern m Extracte geben. Kostet die Ambe auf 2 Nummern n, so kostet sie bei 3 schon $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3n$, und bei 4 schon $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6n$, weil es mit 2 Nummern nur 1mal, mit 3 aber 3mal, und mit 4, 6mal möglich ist, eine Ambe zu errathen.

Ebenso bezahlt aber auch das Lotto im Falle des Errathens alle möglichen Combinationen abwärts, wenn selbe gesetzt worden sind.

Es verbietet daher auch das Lotto nicht, mehr als 5 Nummern in ein Spiel zu nehmen, da das Verhältniß zwischen Einsatz und Hoffnung des Gewinns stets dasselbe bleibt.

b. Combinationen mit Wiederholungen sind solche, wobei zu denen ohne Wiederholung noch die Wiederholungen der einzelnen Elemente gebildet werden. So sind von abcd

$Cm^1 = a,\ b,\ c,\ d$ und $Cm^1(n) = n.$

$Cm^2 = ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,\ aa,\ bb,\ cc,\ dd.$ $\quad Cm^2(n) = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}.$

$Cm^3 = aaa,\ acc,\ bcd,$ und $Cm^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$

$aab,\ acd,\ bdd,$

$aac,\ add,\ ccc,$

$aad,\ bbb,\ ccd,$

abb, bbc, cdd,
abc, bbd, ddd,
abd, bcc.

Man sieht, daß bei den Cm. die Zahl der Classen unbegränzt ist.

Die Formel für $Cm^m(n)$ ist $\frac{n(n+1)\,(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}$.

Bei der ersten Classe geht die Bildung der Cm. wie bei den Co. Verbindet man ferner jede Größe mit allen übrigen und noch einmal mit sich selbst, so wird die Anzahl der Verbindungen $n(n+1)$, da aber hiebei jede Complexion doppelt vorhanden ist, so ist die Anzahl der $Cm^2(n) = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$.

Wird jede dieser Combinationen mit jedem gegebenen Element und noch mit jedem der beiden, die sie enthält, verbunden, so ist die Anzahl der Ternionen $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}$, und da jede wieder 3mal (permutirt) vorkommt, so ist die Formel noch durch 3 zu theilen, daher $Cm^3(n) = \frac{n(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ u. s. w.

Wie viele verschiedene Würfe (ohne Permutation) sind mit 2, 3 ... n Würfel möglich?

Da jeder Würfel 1, 2 ... 6 Augen hat, welche hier die Elemente darstellen, so sind die Würfe mit 2, 3 ... n Würfeln nichts anderes, als die Combinationen mit Wiederholungen von 6 Elementen in der 2., 3., nten Classe, mithin mit 2 Würfel $\frac{6\cdot 7}{1\cdot 2} = 21$, mit drei $\frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$, und mit n Würfel $\frac{6\cdot 7\ldots(6+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$ Würfe möglich.

119.

Treten bei den Combinationen die noch möglichen Permutationen der einzelnen Complexionen ein, so heißt man diese Verbindung der Combinationen und Permutationen Variationen, die also wieder mit und ohne Wiederholung sein können, je nachdem in einer einzelnen Variation das nemliche Element nur ein- oder mehrmal gesetzt werden darf.

Wir wollen sie wieder mit Vo und Vm bezeichnen; für abcd sind:

Vo^1 = a, b, c, d, und $Vo^1(n) = n$.

Vo^2 = ab, ac, ad, » $Vo^2(n) = n(n-1)$.
ba, bc, bd,
ca, cb, cd,
da, db, dc.

Wenn man nemlich jedes der gegebenen Elemente mit allen übrigen, nur nicht mit sich selbst verbindet.

Vo^3 = abc, abd, acb, acd, adb, adc, und $Vo^3(n) = n(n-1)(n-2)$.
bac, bad, bca, bcd, bda, bdc,
cab, cad, cba, cbd, cda, cdb,
dab, dac, dba, dbc, dca, dcb.

Man bildet diese Complexionen dadurch, daß man jede Variation der 2ten Classe mit jedem gegebenen Element, nur nicht mit den beiden, welche die Variation schon enthält, verbindet.

Vo^4 = abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb und $Vo^4(n) = n(n-1)(n-2)(n-3)$.
bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca,
cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba,
dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba.

Man erhält diese, wenn man die Variationen der 3ten Classe mit jedem Element, welches in der Variation noch nicht vorhanden ist, verbindet.

Auch hier ist die Anzahl der Classen gleich der Summe der Elemente, und

$Vo^m(n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.

Die Bildung der Variationen ohne Wiederholung geht, wie die der Co., wobei die einzelnen Combinationen nur noch permutirt werden, daher auch in den allgemeinen Formeln der Co. nur die Divisoren wegbleiben.

Endlich die Variationen mit Wiederholungen sind der Inbegriff jener Complexionen, wenn zu den Variationen ohne Wiederholung noch die Wiederholungen der einzelnen Elemente hinzukommen; so sind von abcd die

Vm^1 = a, b, c, d, und $Vm^1(n) = n^1 = n$.

Vm^2 = aa, ab, ac, ad, » $Vm^2(n) = n^2$.

ba, bb, bc, bd,
ca, cb, cc, cd,
da, db, dc, dd.

Vm^3 = aaa, aab, aac, aad, und $Vm^3(n) = n^3$.
aba, abb, abc, abd,
aca, acb, acc, acd,
ada, adb, adc, add,
baa, bab, bac, bad,
bba, bbb, bbc, bbd,
bca, bcb, bcc, bcd,
bda, bdb, bdc, bdd,
caa, cab, cac, cad,
cba, cbb, cbc, cbd,
cca, ccb, ccc, ccd,
cda, cdb, cdc, cdd,
daa, dab, dac, dad,
dba, dbb, dbc, dbd,
dca, dcb, dcc, dcd,
dda, ddb, ddc, ddd,

und $Vm^m(n) = n^m$.

Jedes einzelne Element läßt sich nemlich mit sich selbst und mit jedem der übrigen Elemente verbinden; sind also n Elemente gegeben, so gibt es $n \cdot n = n^2$ Variationen nach zweien. Um die der 3ten Classe zu erhalten, verbinde man jede Variation der 2ten Classe nochmal mit jedem gegebenen Element, woraus $n^2 \times n = n^3$ Variationen entstehen. Dieser Schluß kehrt bei jeder neuen Classe wieder, daher n Elemente nach m varirt n^m.

Die Zahl aller Variationsformen ist =

$$n + n^2 + n^3 + n^4 \ldots n^m = \frac{(n^m - 1)n}{n - 1}.$$

z. B. die Zahl aller möglichen Variationen der Buchstaben des Alphabets ist für $n = m = 24$

1391,''''724288,''''887252,'''999425,''128493,'402200,

welches Zahlenungeheuer gar keinen Vergleich mit irrdischen Gegenständen zuläßt.

Wie viele Würfe sind überhaupt mit n Würfel möglich?

Es sind oben die möglichen verschiedenen Würfe angegeben worden. Werden aber dabei noch die Permutationen zugelassen, d. h.

betrachtet man zum Beispiel 122, 212 und 221 als drei verschiedene Würfe, so bilden die Würfe die Variationen mit Wiederholungen von 6 Elementen in der so vielten Classe, als Würfel gegeben sind, daher mit zwei Würfeln 36, mit drei 216, mit vier 1296 und mit $n = 6^n$ Würfe möglich.

Die 36 Würfe mit 2 Würfel sind:

1 u. 1	2 u. 1	3 u. 1	4 u. 1	5 u. 1	6 u. 1
1 . 2	2 . 2	3 . 2	4 . 2	5 . 2	6 . 2
1 . 3	2 . 3	3 . 3	4 . 3	5 . 3	6 . 3
1 . 4	2 . 4	3 . 4	4 . 4	5 . 4	6 . 4
1 . 5	2 . 5	3 . 5	4 . 5	5 . 5	6 . 5
1 . 6	2 . 6	3 . 6	4 . 6	5 . 6	6 . 6.

Addirt man die Augen jedes Wurfes, so erhält man

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
5, 6, 7, 8, 9.
6, 7, 8.
7.

woraus sich ergibt, daß 7 die Zahl ist, auf dessen Wurf mit 2 Würfeln mit dem größten Vortheil sich wetten läßt, und die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ sei; folglich 1 gegen 6 gewettet werden kann, außer 7 sind 6 und 8, dann 5 und 9 u. s. w. die wahrscheinlichern Würfe, für 2 oder 12 aber ist nur $\frac{1}{36}$ Wahrscheinlichkeit vorhanden.

Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfel einen Pasch, d. h. einen Wurf, in welchem 2 Würfel die nemlichen Augen zeigen, überhaupt zu werfen, ist $\frac{1}{6}$, die, einen bestimmten Pasch zu werfen, $\frac{1}{36}$.

Bildet man die Würfe mit 3 Würfeln, so findet man 27mal 10 oder 11, 25mal 9 oder 12, 21mal 8 oder 13, 15mal 7 oder 14, 10mal 6 oder 15, 6mal 5 oder 16, 3mal 4 oder 17, und 1mal 3 oder 18, mithin 10 und 11 die häufigsten Würfe, und die Wahrscheinlichkeit $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$, für 9 oder 12 $= \frac{25}{216}$ u. s. w. Am öftesten wird das arithmetische Mittel des höchsten und niedrigsten Wurfes

$\frac{18 + 3}{2} = 10$ oder 11 geworfen.

Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfel 7 oder 8 zu werfen, ist demnach $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$, und die 9, 10 oder 11 mit 3 Würfel zu werfen $\frac{25}{216} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{79}{216}$.

Aus dem Bisherigen lassen sich folgende Fragen beantworten:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

1) von 32 Karten einen König oder ein As, oder eine beliebige Karte einer Farbe, oder endlich eine Karte von 2 bestimmten Farben zu ziehen? für König oder As $\frac{1}{8}$, für eine Karte einer bestimmten Farbe $= \frac{1}{4}$ und für eine von zwei bestimmten Farben $\frac{1}{2}$. Was bedeutet letzteres?

2) Von den 8 Karten einer Farbe auf 2 Züge As und König zu ziehen, mit und ohne Rücksicht auf die Ordnung? Fürs erste $\frac{1}{56}$, fürs 2te $\frac{1}{28}$ (wird mit Hilfe der Cm. gefunden).

3) mit 2 Würfel auf den ersten Wurf 9, und wenn dieß nicht geschieht, auf den 2ten 8 zu werfen? $\frac{4}{36}$ und $\frac{19}{81}$.

4) mit einem Stücke Geld in 2 Würfen wenigstens 1mal Münz zu werfen? $\frac{3}{4}$.

5) mit 3 Würfel einen Pasch und mit 4 gerade 2 gleiche Augenzahlen zu werfen? fürs erstere $\frac{5}{12}$ und fürs letztere $\frac{5}{9}$.

6) mit 3 Würfeln wenigstens 15 zu werfen?

$$\frac{10 + 6 + 3 + 1}{216} = \frac{5}{54}.$$

7) drei auf einander folgende Zahlen mit 3 Würfeln zu werfen? $\frac{1}{9}$.

8) einen der à tous zu erhalten, wenn von 32 Karten von 5 Spielern jeder 3 erhält, und die 16te als Trumpf gilt?

$$\frac{1932}{4495} < \frac{1}{2}.$$

9) Auf wie viel Arten lassen sich 21 Kugeln in 3 Haufen von 3, 7 und 11 Kugeln abtheilen? Auf 42325920 Arten.

10) Wie viel Spiele sind bei dem Piqueten möglich, da von den 32 Karten jeder der beiden Spieler 12 erhält, und die übrigen in 2 Haufen gelegt werden, wovon der eine 5 der andern 3 enthält? 1592″814,947′068,800 Spiele.

11) Wie viele Spiele gibt es beim Quadrillespiel, da die 32 Karten unter die vier Spieler gleich vertheilt werden? 10′518,300.

12) Es reist jemand mit einer Flotte von 12 Schiffen, von denen 3 untergingen, und der 3te Theil der Mannschaft auf der Reise stirbt. Welche Hoffnung ist für das Leben des Mannes übrig? Die Wahrscheinlichkeit, nicht Schiffbruch gelitten zu haben, ist $\frac{3}{4}$, und die Hoffnung für sein Leben im Ganzen $\frac{1}{2}$.

Uebernehmen zwei Personen die Verbindlichkeit, daß der eine für das Eintreffen eines gewissen Ereignisses eine bestimmte Summe ausbezahlt, dafür im Gegentheile eine bestimmte Summe bekommt, so heißt dieß eine Wette. Eine Wette ist gleich oder billig, wenn die von jedem zu bezahlende Summe der Wahrscheinlichkeit, die Wette zu gewinnen, proportionirt ist. Wettet z. B. A mit B, daß er mit 2 Würfel einen bestimmten Pasch werfe, so sind hier 36 Fälle, von denen A nur einen, B aber 35 für sich hat. Es muß daher B 35mal so viel als A setzen, wenn die Wette billig sein soll. Setzt daher B mehr, so ist er im Nachtheil, und A im Vortheil, und umgekehrt.

Ist allgemein der Einsatz von A = m, und seine Wahrscheinlichkeit die Wette zu gewinnen n, der Einsatz von B = p und dessen Wahrscheinlichkeit q, so gilt für jede gleiche Wette

$$m : n = p : q$$

oder

$$mq = np;$$

d. h. das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen in die zu gewinnende Summe muß bei beiden gleich sein.

Praktische Rechenkunst.

120.

Man versteht darunter die Anleitung, wie die Grundsätze und Regeln der reinen Mathematik auf Rechnungsfälle des gemeinen Lebens anzuwenden sind. Ihr Gegenstand sind daher gezählte Grösßen bestimmter Art, oder benannte Zahlen, welche wieder ganz oder gebrochen sein können. Selbe beziehen sich gewöhnlich auf die im bürgerlichen Leben eingeführten Gewichte, Münzen, Längen-, Flächen- und Körpermaaße ꝛc., deren Natur und Verhältniß stets als bekannt vorauszusetzen ist.

Bei Ausmessung oder Bestimmung einer Größe ist aber eine Größe derselben Art als Einheit oder Maß anzunehmen, und zu bestimmen, wie oft dieß als Einheit angenommene Maß in der gegebenen Größe enthalten sei, was man das Verhältniß derselben zu einander bestimmen heißt. Das kleinste bürgerliche Maaß, wodurch das Verhältniß der festgesetzten Unterabtheilungen bestimmt wird, heißt Einheit, ist aber sehr verschieden.

Zur Bestimmung des Verhältnisses der Maße verschiedener Länder ist aber nothwendig, eine bestimmte Größe als Grundeinheit anzunehmen. Obwohl beinahe in allen Ländern ein Längenmaß unter dem Namen Schuh existirt, so ist dasselbe doch in jedem Lande anders; um daher die absolute Länge des Fußes zu wissen, vergleicht man ihn mit dem alten Pariser Fuß, oder mit dem neuen französischen Mèter. Ebenso hat man als Grundeinheit für das Gewicht die Asse des holländischen Troygewichts, oder den köllnischen Rechenpfennig.

Von den vaterländischen und einigen wichtigen ausländischen Maßen.

121.

I. Vom Längenmaße.

Zur Bestimmung der Länge dient der Schuh, die Klafter, Ruthe und Meile.

Der bürgerliche Fuß (Werkschuh) ist in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Scrupel getheilt, welche Eintheilung das Duodezimalmaß heißt. Der geometrische Fuß wird in 10 Zolle, der Zoll in 10 Linien u. s. w. getheilt, welche Eintheilung Dezimalmaß genannt wird. Der bayerische Fuß ist bei 30° R. 129,38 Duodecimallinien des ehemaligen Pariser Fußes. Es verhält sich demnach der bayerische zum alten Pariser Fuß, wie 1000 : 1113.

Die Klafter hält 6 bayerische Fuß.

Die geometrische Ruthe ist = 10 b. Fuß.

Die bayerische Elle = 2 Fuß $10\frac{1}{4}$ Zoll = 369,27 Pariser Linien.

Das größte Längenmaß ist die deutsche oder geographische Meile, deren 15 auf einen Meridiangrad gehen. Sie beträgt demnach 22803,29 Pariser = 25380,076 bayerische Fuß.

Die bayerische Chausseemeile ist = 25406, folglich eine Chausseestunde 12703.

II. Vom Flächenmaße.

Als Maß für Flächen bedient man sich eines Quadrates, d. h. einer Fläche, die aus vier gleichen Seiten und Winkeln besteht, wie □, als Einheit. Je nachdem nun eine Seite dieses Quadrates eine Meile, Ruthe, Klafter, ein Fuß oder Zoll ꝛc. ist, heißt die Fläche Quadratmeile (□M.), Quadratruthe (□°), Quadratklafter (□K.), Quadratfuß (□′), Quadratzoll (□″).

Die Quadratmeile hält 519990034,8241 franz. □′, der Quadratfuß 116,244 paris. □Zoll.

1 □° = 100 □′ = 10000 □″ = 1000000 □‴ nach dem Decimalmaß.

1 □° = 144 □′ = 20736 □″ = 2985984 □‴ nach dem Duodecimalmaß.

Der Fuß ist dabei gewöhnlich in beiden Systemen gleich.

Ein bayerisches Tagwerk ist ein Quadrat, dessen Seite 200′, folglich die Fläche selbst 40000 □′ hält.

III. Körpermaße.

1. Hiezu dient ein Körper, dessen Länge, Breite und Höhe, d. h. alle 3 Dimensionen einander gleich sind, folglich von 6 gleichen Quadraten eingeschlossen ist, und Würfel oder Cubus, (daher der Name Cubikmaß), genannt wird.

Je nachdem nun eine Dimension eines Würfels wieder eine Meile, Ruthe, Fuß ꝛc. mißt, heißt der Würfel Cubik-Meile (C. M.), Cubikruthe (C°), Cubikfuß (C′) ꝛc.

1 C° = 1000 C′ = 1000000 C″ = 1000000000 C‴.

1 C° = 1728 C′ = 2985984 C″ = 5159780352 C‴,

je nachdem wieder Decimal- oder Duodecimalmaß gemeint ist.

Der bayerische C′ ist = 1253,308 franz. C″.

Das Holzmaß ist die Klafter, 6′ lang und eben so hoch. Die gesetzmäßige Länge 3½ Fuß, und Höhe der Stöcke 1 Fuß. Die Klafter hat also 126 C′.

2. Zu dem Körpermaße gehört auch das sogenannte Hohlmaß, womit z. B. Getreid oder Flüssigkeiten gemessen werden.

Als Einheit des Getreidemaßes ist der bayerische Metzen angenommen, welcher 34⅔ bayer. Maßkannen = 1490,66 bayer. Dec. C″ oder 1868,266 franz. Duodec. C″ gleich ist.

6 solche Metzen geben nun ein Schäffel = 208 Maß = 8,944 C′ = 11209,598 franz. Duodec. C″.

1 Schäffel ist = 6 Metzen = 12 Viertel = 24 halbe Viertel = 48 Viertling = 96 halbe Viertling = 192 Dreißiger = 384 halbe Dreißiger.

Der Kalk wird ebenfalls mit Metzen gemessen, allein zum Ersatz für die Zwischenräume gehäuft.

Eisenerze werden nach Seidl, ein zwischen 5 und 6 C′ wechselndes Maß, Steinkohlen nach Kübeln zu 1½ C′, oder nach Seideln zu 6 C′ vermessen und verkauft; doch geschieht der gewöhnliche Verkauf der letztern in Fässern zu 7 Kübeln, oder 10½ C′, oder auch nach dem Gewichte, den Centner zu 100 Pfund.

Als Einheit des bayerischen Getränkmaßes dient die bayer. Maßkanne 43 bayer. Dec. C″ oder 53,8923 pariser Duodec. C″ haltend, $\frac{1}{2}$ Maß heißt auch Seidel, $\frac{1}{4}$ Maß Quart und $\frac{1}{8}$ M. Achterl.

Der bayerische Eimer hält 60 Maß oder 2580 bayer. Dec. C″ = 3233,538 franz. Duodec. C″. Der Visiereimer hat 64 Maß, also 2752 bayer. Dec. C″.

Beim Wein ist noch das Ohm oder Fuder = 2 Eimer gebräuchlich.

3. Viele Körper werden durch das Gewicht bestimmt.

Dem bayerischen Gewichte liegt die holländische Mark Troygewicht (Troyes in Champagne, wo früher bedeutende Jahrmärkte gehalten wurden), zum Grunde.

Die Eintheilung desselben ist 1 Mark = 8 Unzen = 160 Engel = 640 Vierling = 1280 Troisken = 2560 Deursken = 5120 As.

Das französische Troygewicht hat folgende Eintheilung.

1 Marc = 8 Onces = 64 Gros = 192 Deniers = 4608 Grains = 110592 Primes ou Carrobes = 244752,9208 Milligrammes.

Als Silbergewicht wird diese Mark in 12 Deniers à 24 Grains, und als Goldprobegewicht in 24 Karat à 32 Theile eingetheilt.

Das bayerische Pfund Handelsgewicht hat 560 franz. Grammes = 11655,168 holl. As.

1 Pfund = 16 Unzen = 32 Loth = 128 Quintl = 512 Pfenniggewicht = 7680 Gran.

100 Pfd. heißen 1 Centner, 2 Ctn. Tonne, und 2 Tonnen eine Last.

Das neue Apothekerpfund hat 360 fr. Grammes = 7492,608 holl. As.

1 Pfd. = 12 Unzen = 24 Loth = 96 Drachmen oder Quintel = 288 Scrupel = 5760 Gran.

Es sind demnach 9 Pfd. Handelsgewicht = 14 Pfd. Apothekergewicht.

Das bayerische Münzgewicht oder die Köllner Mark = 4867,5 holl. As.

1 Mark = 8 Unzen = 16 Loth = 24 Karat = 64 Quintl = 256 Pfennig = 288 Gran = 4352 Eschen oder As = 65,536 Richtpfennig, und 13,46 . . . k. R. Pf. = 1 holl. As.

Das Silbergewicht, die Wienermark = $\frac{6}{5}$ Kölnermark zu 16 Loth = 5841, also das Pfund zu 2 Mark 11682 holl. As.

4. Bei Dingen, welche blos gezählt werden, nennt man 12 ein Dutzend, 15 eine Mandel, 30 einen Schilling, und 60 einen Schock.

— Beim Papier machen 24 (und Druckpapier 25) Bogen ein Buch, 20 Buch ein Riß, und 10 Riß einen Ballen.

Neues französisches Maß und Gewicht.

122.

Als Grundeinheit aller Maße ist der zehnmillionste Theil des nördlichen elliptischen Meridian = Quadranten der Erde unter dem Namen Métre angenommen, und durch eine äußerst sorgfältige, ausgedehnte Messung zu 3,0784 ... alte Pariser Fuß oder 443,296 Linien bestimmt.

Uebersicht der metrischen Maße und Gewichte.

Längenmaße.

				Toisen.	Sch.	Z.	Linien.
Myriamètre	=	10,000	Métre =	5130,	4,	5,	3,360
Kilomètre	=	1000	: =	513,	0,	5,	3,956
Hectomètre	=	100	: =	51,	1,	10,	1,594
Dekamètre	=	10	: =	5,	0,	9,	4,959
Métre	=	1	: =	0,	3,	0,	11,296
Decimètre	=	$\frac{1}{10}$	: =	0,	0,	3,	8,330
Centimètre	=	$\frac{1}{100}$	: =	0,	0,	0,	4,433
Millimètre	=	$\frac{1}{1000}$	: =	0,	0,	0,	0,443.

Flächenmaße.

Myriare (Quadrat: Kilomètre)	=	10,000 Are	=	9476817,46 □'.
Kilare	=	1000 :	=	947681,75 :
Hectare (Quadrat: Hectomètre)	=	100 :	=	94768,17 :
Dekare	=	10 :	=	9476,82 :
Are (Quadrat: Decimètre)	=	1 :	=	947,68 :
Deciare	=	$\frac{1}{10}$:	=	94,77 :
Centiare (Quadratmètre)	=	$\frac{1}{100}$:	=	9,48 :
Milliare	=	$\frac{1}{1000}$:	=	0,95 :

Körpermaße.

Myrialitre	=	10000	Litre	=	504124,16 C''.
Kilolitre (Cubikmètre, bei dem Holze Stère)	=	1000	:	=	50412,42 :
Hectolitre	=	100	:	=	5041,24 :
Dekalitre	=	10	:	=	504,124 :
Litre (Cubik: Decimètre)	=	1	:	=	50,4124 :
Decilitre	=	$\frac{1}{10}$	:	=	5,0412 :
Centilitre	=	$\frac{1}{100}$	:	=	0,5041 :
Millilitre (Cubik: Centimètre)	=	$\frac{1}{1000}$	:	=	0,0504 :

Gewichte.

			Pfd.	U.	Qu.	Gran.
Myriagramme	= 10000	Gramme	20,	6,	6,	63,5
Kilogramme, (Gewicht eines Cub. Dec. Mètre Wasser)	= 1000	:	2,	0,	5,	55,15
Hectogramme	= 100	:	0,	3,	2,	10,72
Dekagramme	= 10	:	0,	0,	2,	44,27
Gramme, (Gewicht eines Cub. Centim. Wassers)	= 1	:	0,	0,	0,	18,827
Decigramme	= $\frac{1}{10}$	:	0,	0,	0,	1,883
Centigramme	= $\frac{1}{100}$	:	0,	0,	0,	0,188
Milligramme, (Gewicht eines Cub. Millimètre Wassers)	$\frac{1}{1000}$	:	0,	0,	0,	0,019.

Vergleichung und Reduction
der in verschiedenen Ländern üblichen Maße.

123.

1. Allgemeines Längenmaß (Fuß) in Mètres = 3,426 bayer. F. ausgedrückt.

Aarau	0,3000	Amsterdam . . .	0,2831	Alessandria . .	0,3424.
Altona	0,2865	Ancona	0,3907	Appenzell . . .	0,3147.
Baden	0,3000	Barcellona: Canna	1,5813	Basel	0,2982.
Batavia	0,3130	Berlin	0,3138	Bern	0,2933.
Böhmen . . .	0,2964	Botzen (Tyr. F.)	0,3341	Braunschweig .	0,2854.
Bremen	0,2892	Brüssel	0,2842	Bünden . . .	0,3220.
Cadix	0,2826	Canton in China	0,3380	Cassel	0,2877.
Cracau (Stopa) .	0,3564	Coppenhagen . .	0,3138	Darmstadt . .	0,2500.
Dresden . . .	0,2826	Frankfurt am M.	0,2846	Freiburg . . .	0,2932.
Fulda	0,2829	Genf	0,4879	Genua (Canna)	2,4983.

Glarus	0,3000	Gotha	0,2876	Hamburg	0,2865.
Hannover	0,2920	Holstein	0,2960	Leipzig	0,2827.
Lissabon	0,2186	Lithauen	0,3250	London	0,3048.
Lübeck	0,2910	Lucca	0,5899	Luzern	0,3147.
Madrid	0,2826	Malta	0,2830	Messina	0,2420.
Modena	0,5177	München	0,2918	Neapel	0,2636.
Neufchatel	0,3000	Nizza	0,2650	Oldenburg	0,2964.
Paris	0,3248	Petersburg: Saschén	2,1547	Pisa (Passeto)	1,1672.
Rom: Bau=Cama	2,2533	Rom, alter Fuß	0,2947	St. Gallen	0,5147.
Stockholm	0,2968	Stuttgart	0,2865	Venedig	0,5477.
Warschau	0,2880	Weimar	0,2820	Wien	0,5161.
Wiesbaden	0,2878	Zürch	0,3000		

2. Weg oder Meilenmaß in Mètres.

Arabische Meile	1961	Armenische Farsang	4444	Böhmische	6893
Burgundische	5640	Chinesische Li	575	Dänische und Hamb.	7506
Deutsche	7407	Egypt. Schönus	5932	Englische (neue)	1608
Englische See: Meile	1852	Engl. Leagues	5556	Französische Lieue	4444
Französische See: M.	5556	Gallische Leuka	2205	Germanische Rasta	4444
Holländische	5848	Indostanische Koß	2602	Irländische	2046
Italienische	1852	Jüdische alte Meile	1102	Lithauische	8932
Londoner	1522	Niederländische	5556	Oesterr. Postmeile	7586
Polnische	5556	Portugiesische	6173	Preußische	7532
Römische	1472	Werst, neue russ.	1065	Sächsische Poliz. M.	9041
Schlesische	6467	Schottländische	2229	Schwedische	10675
Schweizer	8353	Siamische	3900	Spanische	4172
Stadium griech.	185	See: Stadium	148	Stadium egypt.	99
Türkische Seemeile	1296	Türkische Berri	1677	Ungarische	8555.

3. Schnittwaarenmaß (Elle) in Mètres = 1,2 bayer. E.

Aarau	0,594	Amsterdam	0,689	Anhalt	0,655
Appenzell gr.	0,801	Appenzell. kl.	0,616	Basel (große)	1,177
Basel kl.	0,544	Berlin	0,666	Bern	0,542
Botzen	0,790	Brabanter in Fr. a M.	0,699	Brab. in Hamb.	0,691
Brab. in Brüssel	0,693	Braunschweig	0,570	Bremen	0,578
Bukarest gr.	0,701	Carlsruhe	0,599	Cassel	0,569
Christiania	0,625	Cöln	0,695	Coppenhagen	0,657
Crakau	0,616	Darmstadt	0,599	Dresden	0,566
Frankfurt am Main	0,547	Genf gr.	1,188	Glarus	0,599
Hamburg	0,573	Hannover	0,583	Holstein	0,572
Insbruck	0,769	Leipzig	0,565	Leyden	0,682
Litthauen	0,640	Lucern	0,626	Lübeck	0,577
München	0,853	Niederlande	1,000	Oldenburg	0,581
Riga	0,548	St. Gallen gr.	0,755	St. Gallen kl.	0,611
Schlesien	0,575	Schottland	0,944	Siebenbürgen	0,622
Solothurn	0,546	Stockholm	0,594	Stuttgart	0,614
Trient gr.	0,677	Trient kl.	0,611	Triest gr.	0,676
Triest kl.	0,642	Warschau	0,576	Wien	0,779
Zürch	0,601.				

4. Fruchtmaß in Kiloliter = 4,497 bayer. Scheffel.

Aarau : Viertel = 4 Vierling = 16 Mäßli = 0,0223.
Altenburg : Malter = 2 Scheffel = 4 Viertel = 16 Metzen = 64 Mäßchen = 0,2809.
Altona : Tonne = 8 Scheffel = 32 Viertel, das Scheffel = 0,1391.
Ancona : Rubbio = 8 Coppe = 32 Provende = 0,2730.
Appenzell : Mütt = 4 Viertel = 0,0914.
Barcelona : Salma = 13/5 Carga = 4 Quartera = 48 Cortanes = 0,2719.
Basel : Sack = 8 Müdde = 32 Küpfli = 64 Becher = 0,1293.
Berlin : Scheffel = 4 Viertel = 16 Metzen = 64 Mäßel = 48 Quart = 0,0549.
Bern : Mütt = 12 Maß = 24 Mäßli = 48 Immi = 96 Achterli = 192 Sechszehnleri = 0,1681.
Bologna : Corba = 2 Stari = 8 Quarteroni = 32 Quarticeni = 0,0738.
Botzen : Kornstar 0,0306.
Braunschweig : Wispel = 4 Scheffel = 40 Himten = 160 Vierfaß = 640 Becher = 0,3104.
Bremen : Last = 4 Quart = 40 Scheffel = 160 Viertel = 640 Spint. Scheffel = 0,0711.
Bukarest : Kile = 2 Mirze = 16 Demerli = 256 Occa Demerli = 0,0248.
Cadix : Cahiz = 12 Fanegas = 144 Almudes = 576 Quartillos = 0,0571.
Cagliari : Restiere = 3 Starelli = 48 Imbuti = 0,1470.
Carlsruhe : Malter = 10 Sester = 100 Meßlen = 1000 Becher = 0,1500.
Cassel : Viertel = 16 Metzen = 64 Mäßchen = 0,1604.
Clausenburg : Kübel = 4 Viertel = 0,0984.
Constantinopel : Fortin = 4 Kisloz = 0,1404.
Copenhagen : Tonne = 4 Viertel = 8 Scheffel = 32 Fierdigkar = 0,1391.
Cracau : Korzec = 32 Garnitzen = 0,1201.
Darmstadt : Malter = 4 Simmer = 16 Kumpf = 64 Gescheid = 256 Mäßchen = 0,1280.
Dresden : Scheffel = 4 Viertel = 16 Metzen = 64 Mäßchen = 0,1074.
Ferrara : Moggio = 20 Staje = 0,6046.
Florenz : Sacco = 3 Staje = 12 Quarti = 48 Metadelli = 96 Mezzete = 0,0710.
Frankfurt am Main : Malter = 4 Simmer = 8 Mesten = 16 Sechter = 64 Gescheid = 256 Mäßchen = 1024 Schrott = 0,1147.
Freiburg : Sack = 8 Mäß = 16 Quarterons = 0,0160.
Fulda : Malter = 8 Maß = 32 Metzen = 128 Köpfchen = 0,1756.
Genf : Sack = 0,0776.
Genua : Mina = 8 Quarti = 96 Cambette = 0,1167.
Glarus : Mütt = 4 Viertel = 16 Vierling = 64 Mäßli = 144 Immi glatte Maß = 0,0821.
Gotha : Malter = 0,1752.
Gröningen : Mudde = 0,1000.
Hamburg : Scheffel = 0,1054.
Hannover : Malter = 6 Himten = 0,1866.
Hildesheim : Scheffel = 2 Himten = 0,0518.
Lissabon : Fanega = 4 Alqueiras = 2 Meyos = 2 Quartos = 2 Selemis = 2 Mequias = 0,0540.
London : Imperial : Quarter = 0,2907.
Lübeck : Weizen; oder Roggenscheffel = 0,0534.

Lucca : Staio = 0,0245.
Luzern : Mütt = 4 Viertel = 10 Immi = 0,1390.
Madrid wie Cadix.
Mailand : Some = 10 Mine = 100 Pinten = 1000 Koppi = 0,1000.
Malaga : Fanega = 0,0606.
Messina : Salma = 16 Tomoli = 6 Modilli = 0,2768.
Modena : Staio = 0,0702.
München : Scheffel ꝛc. ꝛc. = 0,2224.
Neapel : Tomolo = 0,0552.
Nizza : Sacco = 5 Staji = 48 Mensinali = 0,1156.
Oldenburg : Tonne = 8 Schäffel = 0,1782.
Osnabrück : Scheffel = 1/100 Last = 0,0287.
Palma : Quatera = 6 Barcellas = 36 Almudas = 0,0721.
Paris : Kiloliter = 1,0000.
Parma : Staio = Quarterole = 0,0514.
Petersburg : Tschetwert = 4 Osmin = 4 Paiok = 8 Tschetwerik = 64 Garnez = 0,1946.
Pisa : Staio = 2 Mine = 4 Quarti = 16 Mezzete = 52 Quartucci = 0,0244.
Prag : Strich = 4 Viertel = 16 Maßel = 192 Seitel = 0,0936.
Presburg : Metzen = 0,0533.
Rom : Rubbio = 2 Rubbiatelas = 4 Quarts = 8 Quarterellas = 12 Staros = 14 2/3 Scorzi = 64 Decines = 0,2672.
Rostock : Scheffel = 0,0389.
St. Gallen : Mütt = 4 Viertel = 0,0761.
Schaffhausen : Malter = 2 Mütt = 8 Viertel = 32 Vierling = 128 Mäßli = 0,1808.
Solothurn : Doppelmaß = 2 Mäß = 0,0265.
Stockholm : Tonne = 2 Span = 32 Kappan = 56 Kannen = 112 Stopp = 448 Quartier = 1792 Ort = 0,1465.
Stuttgart : Scheffel = 8 Simri = 32 Vierling = 256 Ecklein = 1024 Viertlein = 0,1772.
Triest : Staro = 3 Polonicki = 0,0741.
Venedig : Stajo = 0,0849.
Warschau : Korzec = 32 Garcy = 128 Kwarti = 512 Kwaterki = 0,1280.
Weimar : Scheffel = 16 Metzen = 84 Schenkmaß = 0,0770.
Wien : Metzen = 128 Becher = 0,0615.
Wiesbaden : Malter = 4 Viernsel = 16 Kümpfe = 64 Gescheid = 0,1094.
Zürch : Mütt = 16 Vierling = 64 Mäßli = 144 Immi = 0,0821.

5. Getränkmaß in Kiloliter = 15,59 Eim.

Aarau : Saum = 100 Maß = 0,1440.
Alicante : Tomelada = 2 Pipen = 80 Arrobas = 100 Cantaros = 1,0791.
Altenburg : Eimer = 40 Kannen = 80 Maß = 160 Nösel = 0,0678.
Altona : Ahm = 4 Anker = 5 Eimer = 20 Viertel = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Quartier = 320 Oeßel = 0,1448.
Ancona : Soma = 48 Boccali = 0,0685.
Appenzell : Eimer = 32 Maß = 0,0419.
Barcellona : Carga = 16 Cortanes = 32 Quarteras = 128 Quartos = 0,1092.
Basel : Saum = 3 Ohm = 96 oder 120 Maß = 0,1469.
Berlin : Orhoft = 1 1/2 Ohm = 3 Eimer = 6 Anker = 180 Quart = 0,2061.

Bern : Saum = 4 Eimer = 100 Maß = 1,0020.
Bologna : Corba = 2 Mezze Corbe = 4 Quarterolle = 60 Boccali = 240 Foglietti = 0,0738.
Bordeaux : Oxhoft = 0,2281.
Botzen : Yhren = 0,0444.
Braunschweig : Oxhoft = 1/4 Fuder = 0,0221.
Bremen : Ahm = 45 Stübchen = 180 Quart = 720 Mengeln = 0,1428.
Bukarest : Eimer (Viadra) = 10 Occa = 0,0141.
Carlsruhe : Ohm = 10 Stützen = 100 Maß = 1000 Gläser = 0,1500.
Cassel : Ohm = 80 Maß = 0,1594.
Clausenburg : Ur (Eimer) = 0,0113.
Constantinopel : Alma = 0,0052.
Copenhagen : Ahm = 4/30 Faß = 0,1497.
Cracau : Beczka = 34 Garniec = 144 Kwart = 0,1365.
Darmstadt : Ohm = 20 Viertel = 80 Maß = 320 Schoppen = 0,1600.
Dresden : Eimer = 63 Kannen = 126 Nösel = 504 Quartier = 0,0590.
Florenz : Barillo = 20 Fiaschi = 40 Boccali = 80 Mezetti = 160 Quartucci = 0,0417.
Frankfurt am Main : Ohm = 80 alte Maß = 320 Schoppen = 0,1434.
Freiburg : Faß = 16 Brente = 400 Maß = 1600 Schoppen = 0,0391.
Fulda : Ohm = 2 Eimer = 80 Maß = 320 Schoppen = 0,1461.
Genf : Char = Fuder = 12 Setiers = 288 Quarterons = 576 Pots = 0,5484.
Genua : (Weinmaß) Mezzarola = 2 Barilli = 200 Pinte = 0,1485;
(Oelmaß) Barillo = 4 Quarti = 128 Quarteroni = 0,0647.
Glarus : Eimer = 30 Kopf = 60 Maß = 240 Schoppen = 0,1068.
Gotha : Eimer = 40 Kannen = 80 Maß = 160 Nösel = 0,0678.
Hamburg : Ahm = 1/6 Fuder = 1/24 Anker = 0,1448.
Hannover : Ahm = 21/2 Eimer = 4 Anker = 40 Stübchen = 80 Maß = 0,1555.
Leipzig : Eimer = 63 Kannen = 126 Nösel = 504 Quartier = 0,0759.
Lissabon : Tonnelada = 2 Pipas = 52 Almudas = 104 Algueiras = 624 Canhados = 2496 Quardilhos = 0,8706.
London : Imperial Standard Gallon = 0,0045.
Lübeck : Ahm = 20 Viertel = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Quartier = 360 Planken = 640 Ort = 0,1448.
Luzern : Saum = 3 1/3 Ohm = 100 Maß = 400 Schoppen = 4000 Priemen = 0,1728.
Madrid : Cantaro = 8 Acumbres = 32 Quartillos = 0,0157.
Mailand : Brene = 96 Boccali = 0,0755.
Malaga : Pipe Pedro-Ximenes 0,3544.
Marseille : Oel- und Wein-Millerole 0,0597.
Messina : Salma = 8 Quartari = 12 Quartucci = 0,0876.
München : Schenk-Eimer = 60 Maß, (Visier-Eimer 64 Maß) = 0,0641.
Neapel : Barile = 0,0436.
Oldenburg : Anker = 26 Kannen = 40 Quartier = 0,0382.
Osnabrück : Ahm für Wein = 0,1366.
Tonne für Bier = 27 Viertel = 108 Kannen = 0,1317.
Palma : Carga = 26 Quarteras = 0,1011.
Paris : Kiloliter = 1,0000.
Petersburg : Wedro = 0,0127.
Pisa : Barile da Vino = 20 Fiaschi = 40 Mezette = 80 Quartucci = 0,0456.
Barile da Olio = 16 " = 64 " = 128 " = 0,0334.

Presburg : Eimer = 0,0533.
Rom : Wein-Barilo = 41/2 Rubbi = 32 Boccali = 128 Foglietti = 512 Cartocci = 0,0455.
Oel-Barilo = 28 Boccali = 0,0531.
Rostock : Ahm = 4 Anker = 5 Eimer = 20 Viertel = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Pot = 0,1448.
St. Gallen : Eimer = 32 Maß = 128 Schoppen = 0,0511.
Schaffhausen : Eimer trüb. M. = 0,0447, hell. M. = 0,0421.
Solothurn : Saum = 100 Maß = 0,1593.
Stockholm : Ahm (Weinmaß) = 2 Eimer = 4 Anker = 60 Kannen = 120 Stoop = 0,1571.
Tonne (Oel-, Wein-, Fischmaß) = 48 Kannen = 96 Stoop = 384 Quartier = 1536 Jungfern = 0,1257.
Stuttgart : Eimer Helleichmaß = 160 Maß = 0,2939.
Tokay : Weinfaß = 176 ungarische Halbe = 0,1467.
Triest : Orne = 56 Boccali = 0,0657.
Valencia : Weincarga = 15 Arrobas = 60 Alcumbres = 0,1705.
Venedig : Biconzia = 1/4 Amphora = 2 Conzi = 128 Boccali = 0,1586.
Warschau : Beczka = 25 Garniec = 100 Kwarty = 0,1000.
Weimar : Eimer = 80 Schenkmaß = 0,0733.
Wien : Eimer = 0,0580.
Wiesbaden : Ohm = 20 Viertel = 80 kl. Maß = 0,1356.
Zürch : Eimer lauteres Maß = 60 Maß = 120 Quartli = 240 Stozen = 0,1095.

6. Gewichte (Pfunde) in Kilogrammen = 1,786 bayer. Pfd.

Aarau . .	0,4764	Alessandria .	0,3690	Alicante gr. .	0,5185
Altenburg .	0,4665	Altona . .	0,4844	Ancona . .	0,3308
Appenzell gr. ,	0,5844	Barcellona .	0,4090	Basel . .	0,4895
Berlin . .	0,4677	Bern . .	0,5201	Bologna . .	0,3621
Botzen . .	0,5010	Braunschweig .	0,4673	Bremen . .	0,4985
Bukarest : Occa	1,2890	Cagliari . .	0,4009	Carlsruhe .	0,5000
Cassel . .	0,4840	Coburg . .	0,5097	Cöln (Mark) .	0,2387
Constantinopel	0,6378	Copenhagen .	0,4993	Cracau . .	0,4038
Darmstadt .	0,5000	Dresden . .	0,4674	Ferrara . .	0,3392
Florenz . .	0,3395	Frankfurt a.M. schw.	0,5053	Frft. a. M. leicht.	0,4679
Freiburg . .	0,5286	Fulda . .	0,5103	Genf gr. . .	0,5307
Genua gr. .	0,5488	Glarus sch. .	0,5272	Gotha . .	0,4665
Hamburg . .	0,4844	Hannover .	0,4896	Hildesheim .	0,4668
Lausanne . .	0,5083	Lissabon . .	0,4590	London . .	0,5732
L. Pfd. avoir du poid	0,4535	Lübeck . .	0,4833	Lucca . .	0,5722
Madrid . .	0,4609	Mailand gr. .	0,7532	Messina Rotolo gr.	0,8735
Modena . .	0,3401	München . .	0,5600	Neapel (Rotolo)	0,8910
Neufchatel .	0,5201	Nizza . .	0,3100	Osnabrück .	0,4959
Oviedo gr. .	0,6913	Palma (Rot.) .	0,4202	Paris alt. .	0,4895
Parma . .	0,3264	Petersburg .	0,4090	Pisa . . .	0,5395
Prag . .	0,5143	Ragusa . .	0,3632	Rom . .	0,5392
Rostock . .	0,5085	St. Gallen schw.	0,5844	Schaffhausen schw.	0,5750
Solothurn .	0,5189	Stockholm .	0,4235	Valencia . .	0,5568
Venedig gr. .	0,4770	Warschau .	0,4055	Wien . .	0,5600
Wiesbaden .	0,4707	Zürch . .	0,5272.		

IV. Von der Zeitrechnung.

Das mathematische Jahr hat 365 Tage 5 St. 48′ 50″. Im bürgerlichen Leben theilt man dasselbe in 12 Monate à 30 Tage oder 52 Wochen, die Woche in 7 Tage, den Tag in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, diese in 60 Sekunden, und die Sekunde in 60 Terzen. Julius Cäsar nahm (45 vor Christus) das Jahr zu 365 Tage 6 Stunden an, und verordnete demnach, alle 4 Jahre einen Tag einzuschalten (Intercalatio Juliana). Man nennt ein solches Jahr von 366 Tagen ein Schaltjahr, während die übrigen gemeinen Jahre heißen. Der Fehler des Einschaltens von 11′ 10″ betrug aber bis zum Jahre 1582 beinahe 10 Tage, daher Papst Gregor XIII. den Kalender dahin verbesserte, daß er den 5ten October als den 15ten annahm, und in 400 Jahren nur 97 Tage einzuschalten festsetzte. Es sind daher nur jene Sekularjahre Schaltjahre, deren 2 höchsten Ziffer durch 4 theilbar sind. Dieser sogenannte Gregorianische Kalender ist nun beinahe überall eingeführt. Da unter Gregor der zehnte, im Jahre 1700 der eilfte und 1800 der zwölfte Schalttag ausgelassen wurde, so beträgt der Unterschied in der Zeitrechnung bei den Völkern, die nach dem Julianischen Kalender rechnen, wie die Russen und Griechen, dermalen (von 1800—1899) 12 Tage.

Unter Tag versteht man die Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Achse. Die Zeit von einem Neumonde zum andern, heißt Lunation, und beträgt 29 Tage, 12 St., 44′, 03″.

V. Von der Geldrechnung.

Das Zusammenschmelzen des Goldes, Silbers und Kupfers, oder des Silbers und Kupfers, heißt man legiren oder beschicken.

Gold und Silber, ohne Zusatz von schlechterm Metall, heißen fein, daher feine und rauhe Mark. Die feine Mark Gold wird in 24 Karat, die des Silbers in 16 Loth getheilt. Es erklärt sich daraus, was 20=, 18= ꝛc. karatiges Gold, oder 13=, 12löthiges Silber sei.

Die Münzen werden aus legirtem edlern Metalle geprägt. Das absolute Gewicht der Münzen heißt ihr Schrot, der Gehalt an reinem Metalle ihr Korn, das Gesetz, wodurch Schrot, Korn und Kaufwerth der Münze bestimmt wird, der Münzfuß, welcher

demnach die Regel ist, wie viel Stücke einer Münze auf die feine Mark gerechnet werden.

Das Gepräge der Münze enthält bekanntlich Schrift, Namen, Bildniß und Wappen des Münzherrn, der hiedurch die Beschaffenheit der Münze garantirt. Die Bildseite heißt Hauptseite (avers), die Schrift- oder Wappenseite die Rückseite (revers). — Die Prüfung der Münzen durch genau richtig legirte Probir- und Streichnadeln heißt Valvation.

Man unterscheidet reelle oder gangbare, d. h. wirklich geprägte Geldstücke, wie Ducaten, Conventions-Thaler, und fingirte oder Rechnungsmünzen, wodurch als Maßstab der Werth der Dinge, und selbst der geprägten Münzen bestimmt wird, z. B. in Deutschland der Gulden, in England Pfd. Sterling ꝛc.

Der Münzfuß war immer veränderlich. Die in Deutschland merkwürdigsten sind:

A. im Golde.

Der rheinische Goldguldenfuß, 72 Stück = eine rauhe Mark von 18 Karat, 6 Grän Gold und 3 Karat Silber. Nach diesem sind die bayerischen Karolin und Maxdor geprägt.

Der Ducatenfuß, 67 Stück auf die feine Mark von 23 Karat, 8 Gran Gold und 2 Gran Silber.

B. im Silber.

Im Jahre 1296 ließ der böhmische König Wenzel zuerst statt der Brakteaten Silbergroschen schlagen, 14 Loth fein und 60 = eine feine Mark. Nach dem alten Reichsfuß (1566 zu Augsburg bestimmt) gingen 8 Reichsthaler auf die rauhe, und 9 auf die feine Mark Silbers, daher diese Thaler Uncialis hießen.

Im Jahre 1596 prägte man $12\frac{1}{2}$ fl., und im Jahre 1623 aber $13\frac{1}{2}$ fl. aus der feinen Mark.

Nach dem Zinnischen Fuß, 1667 zu Zinna im Magdeburgischen von Sachsen und Brandenburg eingeführt, gingen $10\frac{1}{2}$ Thaler auf die feine Mark.

Im Jahr 1690 wurde in Sachsen, Brandenburg und Braunschweig der Leipziger Fuß eingeführt, die feine Mark Silber zu 12 Thaler oder 18 fl. Obwohl dieser Fuß 1733 zum allgemeinen Reichsfuß erhoben wurde, so ist er doch nur noch in Churbraunschweig, im Hannöverischen und Schwedisch-Pommern beibehalten.

Im Jahre 1750 wurde in Preußen der Graumann'sche oder

21 Guldenfuß angenommen, und 1764 erneuert, 14 Reichsthaler oder 21 fl. auf die feine Mark.

Im Jahre 1753 wurde in Bayern, Oesterreich, dann auch in Sachsen und Braunschweig der Conventions= oder 20 fl. Fuß eingeführt, $13\frac{1}{3}$ Thaler = eine feine Mark. Nach diesem werden dermal in Oesterreich, Bayern und Sachsen die Silbermünzen geprägt, aber nur in Oesterreich und Sachsen cursiren sie nach dem 20 fl. Fuß, sonst nach dem

neuern Reichs= oder 24 fl. Fuß, die feine Mark zu 16 Reichsthaler = 24 fl. rhein. = 10 Conv. Thaler.

Bayern führt Buch und Rechnung nach Gulden = 60 Kr. = 240 Pf. = 480 Hll. Der Zahlwerth ist der Conventionsfuß, und bestimmt die Cöllner Mark fein Silber zu 24 Gulden.

Goldmünzen: Carolin, einfache à 11 fl., 24 eine Cöllner Mark, Maxdor à $7\frac{1}{3}$ fl., 36 Stück eine Cöllner M., beide 18 Karat 6 Grän fein, werden nicht mehr geprägt. Ducaten à $5\frac{1}{3}$ fl., 67 Stück eine Cölln. Mark, 23 Karat 8 Grän fein; Goldgulden à $3\frac{2}{3}$ fl., 72 eine Cöll. M. 18 Karat 6 Grän fein.

Silbermünzen: Speciesthaler zu $2\frac{2}{5}$ fl., $8\frac{1}{3}$ Stück eine Cölln. M. 13 Loth 6 Gr. fein; Kronenthaler zu $2\frac{7}{10}$ fl., 7,97 Stck. eine Cölln. M. 13 Loth 17 Gr. fein; Kopfstücke, ganze zu 24 kr., 9 Loth 6 Gr. fein, halbe zu 12 kr., 8 Loth fein, Viertel zu 6 kr.

Anmerk. Ueber die vorzüglichsten ausländischen Münzen sehe man die pag. 301 angehängte Tabelle.

Rechnungsarten mit benannten Zahlen.

I. Vom Reduciren und Resolviren.

124.

Zahlen oder Einheiten einer niedrigern Ordnung auf Einheiten einer höhern Ordnung bringen, z. B. Loth auf Zentner, Kreuzer auf Gulden ꝛc. heißt reduciren, dagegen Einheiten höherer Benennung auf Einheiten niedriger Ordnung zu bringen, z. B. Gulden auf Kreuzer oder Pfennige, heißt resolviren.

Die Zahl, welche angibt, wie viel niedrigere Einheiten eine höhere geben, heißt Reductions= oder Auflösungszahl, welche entweder als bekannt vorausgesetzt, oder gegeben wird.

Das Resolviren geschieht durch Multiplication der höhern Ordnung mit der Auflösungszahl der nächst niedrigern oder niedrigsten Ordnung, in die man resolviren will. Bei mehrnamigen Größen werden nach jeder Multiplication die vorhandenen gleichartigen Größen dazu gezählt.

3 Zentner sind = 3 . 100 = 300 Pfd. = 300 . 32 = 9600 Loth = 9600 . 4 = 38400 Quintl.

5 fl. 23 Kr. 3 Pf. = 5 . 60 + 23 = 323 Kreuzer = 323 × 4 + 3 = 1295 Pfennig.

Das Reduciren geschieht durch Division der gegebenen Einheiten der niedrigsten Benennung durch die Reductionszahl der nächst höhern Ordnung. Der allenfallsige Rest bekommt die Benennung des Dividends, der Quotient die nächst höhere.

Wie viel Gulden, Kreuzer, Pfennig und Heller sind 35827 Heller?

$$\frac{35827}{2} = 17913 \text{ Pfennig } 1 \text{ Heller}$$

$$\frac{17913}{4} = 4478 \text{ Kreuzer } 1 \text{ Pfennig}$$

$$\frac{4478}{60} = 74 \text{ Gulden } 38 \text{ Kreuzer, mithin } 35827 \text{ Heller}$$

= 74 Gulden 38 Kreuzer 1 Pfennig 1 Heller.

Wenn die ganze gegebene Zahl auf Einheiten derselben höhern Ordnung reducirt werden soll, so setze man die Reste als Decimalbrüche bei. So sind 7854 Linien = 654,5 Zoll = 54,5416... Fuß.

Mehrnamige Zahlen bringe man zuerst auf die kleinste Benennung und verfahre eben so, z. B. 3 fl. 17 kr. 3 pf. sollen auf Gulden reducirt werden. Da 3 fl. 17 kr. 3 pf. = 791 pf., so erhält man $\frac{791}{4} = 197{,}75$ kr. $= \frac{197{,}75}{60} = 3{,}2958\ldots$ oder

$\frac{791}{240} = 3{,}2958\ldots$ fl.

Das Reduciren und Resolviren von Zahlen, welche Zeitbestimmungen anzeigen, erfodert manchmal große Vorsicht, weil nicht jeder Monat gleichviel Tage hat. So sind 90 Tage nur dann 3 Monat, wenn Januar, Februar und März gemeint sind, und das Jahr kein

Schaltjahr ist, und die 244 ersten Tage eines Schaltjahrs nur 8 Monate, und nicht 8 M. 4 Tage. u. s. w.

II. Addition.

Man setze die gleichartigen (von der höchsten Ordnung zur Linken anfangend) unter einander, und addire selbe von der Rechten zur Linken; erhält man von einer Art so viel, daß Einheiten der nächst höhern Ordnung enthalten sind, so zieht man selbe heraus, und zählt sie der nächst höhern Ordnung bei.

25 fl. — 36 kr. 3 pf. 1 hl.
47 fl. — 53 kr. 3 pf. 1 hl.
73 fl. 30 kr. 3 pf. —

III. Subtraction.

Man subtrahire, nachdem der Ansatz wie bei der Addition gemacht wurde, von der niedrigsten Ordnung anfangend.

Wenn an irgend einer Stelle der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, so borge man von der nächst höhern Ordnung eine Einheit, welche, in Theile der niedrigern Benennung umgewandelt, zu den schon vorhandenen Einheiten gezählt wird.

Sollten mehrere auf einander folgende Ordnungen fehlen, so nehme man eine Einheit von der zunächst vorhandenen höhern Ordnung, und vertheile sie auf die Ordnungen, wo keine Zahlen gegeben sind, so daß man überall abziehen kann.

	4	99	31	4
43 fl. 24 kr. 3 pf. 1 hl.	25 Zt. — ℔. — Lth. — Q.			
— 15 fl. 38 kr. 2 pf. 1 hl.	— 13 Zt. 57 ℔. 13 Lth. 1 Q.			
27 fl. 46 kr. 1 pf. —	11 Zt. 42 ℔. 18 Lth. 3 Q.			

Bei Zeitbestimmungen wird stets nur die vergangene Zeit ausgedrückt, z. B. der 4te September 1832 Abends 10 Uhr heißt 1831 Jahr 8 M. 3 Tage 22 St., weil die Stunden von Mitternacht gezählt werden. Bei Bestimmung von Zeiträumen überhaupt ist die schon oben gemachte Bemerkung nicht zu vergessen, denn nicht selten werden bei solchen Rechnungen Fehler von 1 oder ein paar Tagen gemacht. Es würde hier zu weitläufig, selbst nur die vorzüglichern Fälle, welche zu Irrthum Anlaß geben könnten, anzuführen, daher dieß der mündlichen Erläuterung überlassen wird.

IV. Multiplication.

Man bringt alle Sorten des Multiplicands auf den Ausdruck der niedrigsten Ordnung, und multiplicirt diesen veränderten Multiplicand mit dem ebenfalls resolvirten Multiplicator, wenn dieser eine benannte Zahl ist.

Oder man reducirt Multiplicand und Multiplicator auf die höchste Benennung und multiplicirt die erhaltenen Resultate.

Das Produkt hat mit dem Multiplicand gleiche Benennung und wird dann, je nachdem das erste oder letztere Verfahren angewendet wurde, reducirt oder resolvirt.

Endlich kann man auch den Multiplicator mit allen Theilen des Multiplicands, von der niedrigsten Ordnung beginnend, multipliciren, und aus den erhaltenen Producten die allenfallsigen höhern Einheiten zu den treffenden Sorten addiren.

Jemand erspart 12 Jahre lang, jährlich 36 fl. 48 kr. 3 pf., wie viel beträgt das Ersparte?

1. (36 fl. 48 kr. 3 pf.) × 12 = 8835 pf. × 12 = 106020 pf. = 26505 kr. = 441 fl. 45 kr.

2. (36 fl. 48 kr. 3 pf.) × 12 = 36,8125 × 12 = 441,75 fl. = 441 fl. 45.

3. 36 fl. 48 kr. 3 pf.
× 12
---
432 fl. 576 kr. 36 pf. = 441 fl. 45 kr.

Man sieht hieraus, wie man aus dem Werthe der Einheit den Werth einer Quantität erhält.

Das Produkt zweier Zahlen, die sich auf einerlei Längenmaß beziehen, gibt nach geometrischen Gründen den Flächeninhalt, und das Produkt dreier den cubischen oder Körperinhalt in demselben Maße, welche Produkte nach dem Dec. oder Duodecimalmaß auf die erhaltenen höhern Einheiten reducirt werden.

Wie groß ist der Flächen- und der cubische Inhalt eines Saales, der 50′ 8″ Dec. Maß lang, 36′ 7″ breit, und 18′ 9″ hoch ist?

Der Flächeninhalt ist = 50′ 8″ × 36′ 7″ = 186436 □″ = 1864 □′ 36 □″.

Der Cubikinhalt 508 × 367 × 189 = 35236404 C″ = 35236 C′ 404 C″.

V. Division.

Sind die beiden Zahlen von verschiedener Art, so bringe man sie auf dieselbe Benennung, und dividire wie gewöhnlich.

Wenn der Divisor eine unbenannte Zahl ist, so bringe man den Dividend auf die höchste oder niedrigste Ordnung, und dividire ebenfalls auf die gewöhnliche Art.

Oder man dividirt endlich jeden Theil des Dividends, jedoch bei der höchsten Ordnung anfangend, durch den Divisor, der allenfallsige Rest wird in Theile der nächsten Ordnung aufgelöst, zu den schon vorhandenen gezählt, und dieß Verfahren durch alle Theile des Dividends so durchgeführt.

Daß $\frac{\text{Flächenmaß}}{\text{Längenmaß}} = \text{Längenmaß}$

$\frac{\text{Körpermaß}}{\text{Längenmaß}} = \text{Flächenmaß}$, und

$\frac{\text{Cubikmaß}}{\text{Flächenmaß}} = \text{Längenmaß}$ gibt, ist leicht einzusehen.

Eben so sieht man, daß durch die Division aus dem Werthe einer Quantität der Werth der Einheit gefunden werden kann.

Ein Garten hält 72 □° 96 □′ und ist 12° 8′ lang, wie breit ist er?

$$\frac{72\ \square^\circ\ 96\ \square'}{12^\circ\ 8'} = \frac{7296\ \square'}{128'} = 57' = 5^\circ\ 7'.$$

4 Erben haben 1347 fl. 15 kr. 3 pf. zu theilen, wie groß ist jeder Erbtheil?

$$\frac{1347\text{ fl. }15\text{ kr. }3\text{ pf.}}{4} = \frac{323343}{4} = 80835{,}75\text{ pf.} = 20208\text{ kr.}$$

3,75 pf. = 336 fl. 48 kr. 3,75 pf.

oder

$$\frac{1347\text{ fl. }15\text{ kr. }3\text{ pf.}}{4} = \frac{1347{,}2625\text{ fl.}}{4} = 336{,}815625 = 336\text{ fl.}$$

48 kr. 3,75 p.

oder

$$\frac{1347\text{ fl. }15\text{ kr. }3\text{ pf.}}{4} = 336\text{ fl. }45\text{ kr.} + 3\text{ kr. }3\text{ pf.} + \frac{3}{4} =$$

0,75 pf. = 336 fl. 48 kr. 3,75 pf.

Anwendung der Proportionslehre auf benannte Zahlen.

125.

Da außer der Aufgabe: für gegebene Größen das arithmetische Mittel zu finden, die arithmetischen Proportionen nur bei einigen Fällen der Zeitrechnung, welche jedoch gar keine Schwierigkeit darbieten, Anwendung finden, so können selbe hier füglich übergangen werden. Desto wichtiger und ausgedehnter ist die Anwendung der geometrischen Proportionen.

Sowohl das gemeine als wissenschaftliche Leben bietet unzählige Rechnungsfälle dar, deren Auflösung sich auf die geometrischen Proportionen gründet, wie z. B. die Verwandlung der besondern Zahlarten, der Maße, Gewichte und Münzen in andere, die Berechnung von Waaren und ihre Preise, die Tauschrechnung, Zinsrechnung, Rabattrechnung ꝛc.

Ein geometrisches Verhältniß benannter Zahlen kann aber nur zwischen Größen von einerlei Art statt haben, da das eine Glied aus dem andern entstanden gedacht werden soll. Es lassen sich daher die geometrischen Proportionen nur da anwenden, wo zwei zählbare Gegenstände in demselben gegenseitigen Verhältnisse zugleich ab-, oder zunehmen, oder wo beim Zunehmen des einen der andere in demselben Verhältniß abnimmt, und umgekehrt. Man sagt im ersten Falle, die Größen sind einander gerade proportional, im letzteren — umgekehrt.

Waaren und Preise, Arbeiter und Zeit bei gleicher Arbeit sind Beispiele beider Arten.

Stehen a und b im geraden Verhältniß, so muß man stets sagen können, je mehr a, desto mehr b, beim verkehrten, je mehr oder weniger a, desto weniger oder mehr b.

Wo ein solches gegenseitiges Verhältniß nicht statt findet, was jedesmal durch die Urtheilskraft entschieden wird, können die geometrischen Proportionen nicht angewendet werden. So besteht z. B. kein Verhältniß zwischen dem Alter und dem Gewichte oder der Größe eines Menschen, zwischen verschiedenen Arbeiten und dem Lohne für dieselben ꝛc.

Einfache Regel de tri.

126.

Sind nun 3 benannte Zahlen von zweierlei Art gegeben, so daß ein geometrisches Verhältniß statt findet, so heißt das Verfahren, die 4te geometrische Proportionalzahl dazu zu finden, die (einfache) Regel de tri (de tribus terminis) wegen ihrer häufigen Anwendung und Nutzens auch regula aurea genannt, und zwar gerade Regel de tri, oder verkehrte, je nachdem die zwei ungleichnamigen Größen im geraden oder verkehrten Verhältniß stehen.

Die Ordnung der Glieder anlangend, kommt das fehlende auf die vierte Stelle, und das mit demselben von einerlei Art ist, an die dritte.

Die Größe, deren Werth bestimmt werden soll, heißt die Fragezahl.

Ist nun das Verhältniß ein gerades, so kommt die Fragezahl an die zweite, und die noch übrige Größe an die erste Stelle, bei dem verkehrten Verhältniß dagegen die Fragezahl an die erste, und die übrige an die zweite.

Die beiden ersten Glieder, oder die Glieder des gegebenen Verhältnisses müssen gleiche Namen haben, widrigenfalls auf Zahlen einerlei Art reducirt oder resolvirt werden.

Von nun an kommt die Benennung der Glieder, so wie die absolute Größe der Zahlen gar nicht mehr in Betrachtung, daher auch alle §. 74 angeführten Veränderungen und Vereinfachungen angewendet werden können, woraus hervorgeht, daß bei der Regel de tri nicht benannte Zahlen, oder gar solche von verschiedener Art multiplicirt oder dividirt werden.

Endlich bestimmt man nach §. 73 den Werth der Unbekannten, welche nun bei der oben angegebenen Stellung der Proportion mit dem dritten Gliede einerlei Namen hat.

Beispiel für die gerade Regel de tri. Was kosten 3 Scheffel 4 Metzen, wenn man für $13\frac{1}{2}$ fl. 1 Sch. 3 Metzen erhält?

1 Sch. 3 M. : 3 Sch. 4 M. = $13\frac{1}{2}$ fl. : x fl.

9 M. : 22 M. = $13\frac{1}{2}$: x, oder

$1\frac{1}{2}$ Sch. $3\frac{2}{3}$ Sch. = $13\frac{1}{2}$ fl. : x fl.

woraus x = 33 fl.

Für die verkehrte Regel de tri: Zur Bekleidung einer Wand braucht man 150 Ellen Tapeten, wenn selbe $1\frac{2}{3}$ Ellen breit sind. Wie viel sind von $1\frac{7}{8}$ Ellen breiten nöthig?

$$1\frac{7}{8} \text{ br.} : 1\frac{2}{3} \text{ br.} = 150 \text{ Ell.} : x \text{ Ell.}$$

woraus $x = 133\frac{1}{3}$ Ellen.

In manchen Fällen ist jedoch eine größere Breite ganz unnütz.

Die Probe wird am besten durch Wendung der Aufgabe gemacht.

127.

Manchmal ist das gegenseitige Verhältniß kein gewöhnliches einfaches, sondern durch ein besonderes Gesetz bestimmtes. z. B.

Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder Halbmesser.

Die Gewichte der Kugeln von einer und derselben Materie verhalten sich wie die 3ten Potenzen ihrer Durchmesser.

Die Fallräume der Körper verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten.

Die Stärke des Lichtes steht im umgekehrten Quadratverhältniß mit dem Abstand des leuchtenden Gegenstandes vom Auge.

Die Preise der Diamanten verhalten sich wie Quadrate ihrer Gewichte.

Die Schwingungszeiten der Pendel verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

Die Geschwindigkeiten des Ausflusses von Flüssigkeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Höhen der Flüssigkeiten über der Oeffnung des Ausflusses.

128.

Die (sogenannte) Gesellschaftsrechnung gibt die Anweisung zur Vertheilung eines gemeinschaftlichen Gewinnes oder Verlustes nach dem Verhältniß der Einlage.

Die §. 74. 13 gelöste Aufgabe, eine Größe m in mehrere Theile x, y, z . . . zu zerlegen, die sich verhalten, wie die Zahlen a, b, c . . . begreift alle hieher gehörigen Fälle in sich.

Die Gesellschaftsrechnung heißt einfach oder zusammengesetzt, je nachdem die Verhältnißzahlen unmittelbar gegeben, oder erst aus den Bedingungen der Aufgabe berechnet werden müssen.

Aus §. 74 geht die practische Regel für die Lösung der Aufgaben der Gesellschaftsrechnung hervor:

Man theile das zu vertheilende Ganze durch die Summe aller Verhältnißzahlen, so gibt dieser Quotient mit jeder einzelnen Verhältnißzahl multiplicirt, die entsprechenden gesuchten Theile.

Wendet man die Gesellschaftsrechnung zur Bestimmung der Größe der Bestandtheile einer Mischung an, so heißt sie Vermischungsregel.

Zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen gibt A 2000, B 3000 und C 4000 fl. Wenn nun 6300 fl. gewonnen werden, wie viel gebührt jedem der Einlage gemäß?

Nach §. 74. 13 ist $m = 6300$, $a = 2000$, $b = 3000$ und $c = 4000$, daher

$$9000 : 6300 = 2000 : x = 1400$$
$$= 3000 : y = 2100$$
$$= 4000 : z = 2800$$
$$x + y + z = m = 6300 \text{ fl.}$$

Zur Fabrication des feinen rothen Siegellackes nimmt man zu 2 ℔ Terpentin, 3 ℔ Zinnober, 3 ℔ Schellack und 16 Loth Kreide. Wie viel von jedem Bestandtheil braucht man zu 1 Centner 2 ℔?

$$2 + 3 + 3 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}, \text{ und } 102 : \frac{17}{2} = 12;$$

folglich $2 \times 12 = 24$ ℔ Terpentin,
$3 \times 12 = 36$ = Zinnober,
$3 \times 12 = 36$ = Schellack,
$\frac{1}{2} \times 12 = 6$ = Kreide,
102 ℔ $= 1$ Ct. 2 ℔.

Die Regel, welche angibt, nach welchem Verhältniß zwei oder mehrere Dinge gemischt werden sollen, um einen mittleren Werth der Mischung zu erhalten, heißt Alligationsregel. Doch werden solche Aufgaben weit schneller mit Hilfe der Gleichungen nach §. 88. 22 gelöst.

Bei den Römern bestand ein Gesetz (lex falcidia), welches befahl, daß wenn in einem Testament die Legaten mehr als $\frac{3}{4}$ des hinterlassenen Vermögens betrugen, der Haupterbe ein $\frac{1}{4}$ des Vermögens, das man quartam falcidiam nannte, im Voraus nehmen dürfe, und

nur die übrigen $\frac{3}{4}$ nach der im Testament bestimmten Ordnung vertheilt werden sollen.

Es macht daher Jemand den A zum Haupterben, B soll 400 fl., C 300 fl. und D 500 fl. erhalten. Die ganze Verlassenschaft aber beläuft sich auf 1440 fl. Wie viel trifft es jeden der Legatarien nach dem falcidischen Gesetze.

Da $400 + 300 + 500 = 1200 > \frac{3}{4} \cdot 1440$, so erhält A = 360 fl. (quartam falcidiam). Von den übrigen 1080 bekommt B = 360, C 270 und D 450 fl.

Sind bei einer Gesellschaftsrechnung nicht nur die Einlagen, sondern auch die Zeiten des Darleihens verschieden, so müssen sich die Gewinnste so gegen einander verhalten, wie die Produkte aus den Einlagen in die Zeiten; denn der Gewinn steht mit der Einlage und Zeit im zusammengesetzten Verhältniß.

Gibt A 200 fl. auf 2 Jahr 3 Monat, B 300 fl. auf 1 Jahr 8 Monat, und C 400 fl. auf 6 Monat.

Wie ist der gemeinschaftliche Gewinn von 1000 fl. zu vertheilen?

$$200 \times 2\frac{1}{4} = 450.$$

$$300 \times 1\frac{2}{3} = 500.$$

$$400 \times \frac{1}{2} = 200.$$

$$1150.$$

$$1150 : 450 = 1000 : x = 391\frac{7}{23}.$$

$$1150 : 500 = 1000 : y = 434\frac{18}{23}.$$

$$1150 : 200 = 1000 : z = 173\frac{21}{23}.$$

fl. 1000 —

Hierher gehört auch die sogenannte Durchschnittsrechnung; wenn nemlich ein aus ungleichen Theilen zusammengesetztes Ganzes in gleiche Theile getheilt werden soll. Die Aufgabe fällt mit der Be-

stimmung des arithmetischen Mittels (§. 71. 3) zusammen. Daher die Regel: man theile die Summe der gegebenen Theile durch die Anzahl der Theile selbst.

Ein Kornhändler hat 50 Scheffel Getreid à 10 fl. 30 kr., 60 Scheffel à 11 fl. und 40 Scheffel à 12 fl. 15 kr., was ist der Durchschnittspreis per Scheffel?

$$50 \times 10\frac{1}{2} = 525 \text{ fl.}$$
$$60 \times 11 \quad = 660 \text{ »}$$
$$40 \times 12\frac{1}{4} = 490 \text{ »} \quad \text{also}$$

150 Scheffel = 1675 fl., daher

$$1 \text{ Scheffel} = \frac{1675}{150} = 11\frac{1}{6} \text{ fl.}$$

Uebernimmt eine Gesellschaft die Verbindlichkeit, den durch Feuersbrunst entstandenen Schaden der Mitglieder zu ersetzen, so heißt eine solche Veranstaltung Feuer- oder Brandassecuranz. Die Berechnung der Beiträge geschieht wieder ganz nach den Regeln der Gesellschaftsrechnung, und ist für 100 fl. des Assecuranzkapitals eines Mitgliedes durch die Formel S : A = 100 : p gegeben, wo S den Werth aller assecurirten Gebäude (nach Abzug der jährlichen Regiekosten der ganzen Anstalt), A den Werth des Schadens, und p den Beitrag von fl. 100 bezeichnet.

129.

Wenn zur Auffindung der unbekannten Größe mehrere Proportionen gebildet werden müssen, oder das Verhältniß zweier Größen aus mehreren Verhältnissen zusammengesetzt ist, so heißt die Regel zur Auffindung der unbekannten die zusammengesetzte Regel de tri, und zwar Regel von fünfen, sieben, neun u. s. w. (regula de quinque, septem, novem etc.), je nachdem 5, 7, 9 u. s. w. Größen gegeben sind.

Wenn 10 Mann in 8 Tagen 1000 Stück einer Waare verfertigen, wenn sie täglich 9 Stunden arbeiten, wie viel machen 25 Mann in 6 Tagen bei 7 Stunden täglicher Arbeitszeit?

Jede solche Aufgabe besteht aus zwei Theilen, deren einer lauter bekannte Glieder enthält, und Bedingungssatz genannt wird, der andere aber die unbekannte enthält, und Fragesatz heißt. So ist im

gegebenen Falle der Bedingungssatz: 10 Mann verfertigen in 8 Tagen 1000 Stück, wenn sie täglich 9 Stunden arbeiten, der Fragesatz: wie viel machen 25 Mann in 6 Tagen bei 7 Stunden täglicher Arbeitszeit?

Jede Aufgabe der zusammengesetzten Regel de tri läßt sich durch wiederholte einfache Regel de tri auflösen, indem man stets nur zwei verschiedene Verhältnisse in Rechnung bringt.

Obige Aufgabe zerfällt daher in folgende:

1) Wie viel Stück machen bei übrigens gleichen Umständen 25 Mann?

$$10 : 25 = 1000 : x = 2500.$$

2) Wie viel werden in 6 Tagen fertig, wenn in 8 Tagen 2500 fertig werden?

$$8 : 6 = 2500 : y = 1875 \text{ St.}$$

3) Wie viel werden bei 7 Stunden Arbeitszeit fertig, wenn bei 9 Stunden 1875 Stück gemacht werden?

$$9 : 7 = 1875 : z = 1458\frac{1}{3}.$$

Setzt man die 3 Proportionen unter einander, so erhält man

$$\begin{array}{l} 10 : 25 = 1000 : x \\ 8 : 6 = x : y \\ 9 : 7 = y : z, \text{ woraus} \end{array}$$

$$10.8.9 : 25.6.7 = 1000 : z = 1458\frac{1}{3};$$

d. h. es verhalten sich die Zahlen der Stücke, wie die Produkte aus der Anzahl der Arbeiter in die Arbeitstage und in die täglichen Arbeitszeiten.

Hängt überhaupt die Bestimmung der unbekannten Größe von mehreren Größen so ab, daß die Unbekannte für sich allein betrachtet, mit jeder der übrigen im geraden Verhältniß steht, so steht sie mit allen übrigen im zusammengesetzten Verhältniß.

Kommen aber Verhältnisse vor, die mit dem, worin die unbekannte sich befindet, in verkehrter Proportion stehen, so müssen diese Verhältnisse zuvor umgekehrt werden.

Auf diese Weise kann demnach jede noch so zusammengesetzte Aufgabe dieser Art aufgelöst werden.

Für die Ausübung merke man jedoch vorzüglich folgendes Verfahren:

Man schreibe alle Glieder des Bedingungssatzes so neben einander, daß die mit der unbekannten gleichnamige zuerst, die übrigen in beliebiger Ordnung in einer Linie stehen. Unter diese setze man überall die gleichnamige des Fragesatzes und an die erste (leere) Stelle x. — Sodann beurtheile man das Verhältniß der unbekannten zu jeder ungleichnamigen des einen Satzes, ob es nämlich gerade oder verkehrt sei. Im ersten Falle versetze man die Glieder, im zweiten behalten sie ihre Stellung bei.

Bildet man nun eine Proportion, deren 4tes Glied x, 3tes die mit x gleichnamige obenstehende Größe ist, so bilden alle in der Linie neben x stehenden das 1ste, und die darüber befindlichen das 2te Glied, wornach nun x leicht zu bestimmen ist. z. B.

Wenn 18 Weber in 8 Wochen bei 6 Arbeitstagen per Woche, und 10 Arbeitsstunden per Tag 100 Stücke Leinwand verfertigen, deren jedes 30 Ellen lang und $1\frac{1}{2}$ Ellen breit ist, wie viel Stück werden 42 Weber bei 5 Arbeitstagen jeder Woche und 12 Stunden jeden Tag in 12 Wochen liefern, die 36 Ellen lang und 2 Ellen breit sind?

	Stück.	Web.	Woch.	Tag.	Std.	Ell. l.	Ell. br.
Bedingungss.	100.	18.	8.	6.	10.	30.	$\frac{3}{2}$.
Fragesatz.	x.	42.	12.	5.	12.	36.	2.

Geordnet:

100. 42. 12. 5. 12. 30. $\frac{3}{2}$.

x. 18. 8. 6. 10. 36. 2, und

$$18.8.6.10.36.2 : 42.12.5.12.30.\frac{3}{2} = 100 : x;$$

woraus $x = 218\frac{3}{4}$.

Zieht man eine vertikale Linie und schreibt alle Glieder der obern Reihe rechts, die der untern links, so bilden diese vertikalen Reihen die Produkte der äußern und innern Glieder; sind daher diese Produkte links $= mx$, und rechts $= p$, so ist also $mx = p$ und $x = \frac{p}{m}$.

Für diesen Ansatz gilt demnach folgende Regel, die nach ihrem Erfinder die Reesische genannt wird:

Man setze der vertikalen Linie links oben die unbekannte x, rechts die mit ihr gleichartige. Von den übrigen je 2 Größen setze man bei einem geraden Verhältniß die Zahl des Fragesatzes rechts, die des Bedingungssatzes links, beim verkehrten umgekehrt. Das Produkt der rechtsstehenden durch das der linksstehenden dividirt gibt die unbekannte.

Da die unbekannte durch einen Bruch ausgedrückt ist, dessen Zähler die rechts-, und Nenner die linksstehenden Zahlen sind, so gelten auch alle bei Brüchen möglichen Veränderungen und Vereinfachungen.

Obige Aufgabe würde nach der Reesischen Regel so berechnet werden:

	Stück.	Web.	Woch.	Tag.	Std.	Ell. l.	Ell. br.
Bed.	100.	18.	8.	6.	10.	30.	$\frac{3}{2}$.
Frages.	x.	42.	12.	5.	12.	36.	2.

x	100.	oder x	5	
18	42	4	7	
8	12		5	
6	5		5	
10	12	4x	875	
36	30	x	$218\frac{3}{4}$.	
2	$\frac{3}{2}$			

130.

Eine weitere Anwendung von der zusammengesetzten Regel de tri macht man bei Bestimmung des Verhältnisses zweier Dinge, vorzüglich bei Maßen, Gewichten, Münzen ꝛc., wenn dieses Verhältniß durch Zwischenverhältnisse zu bestimmen ist, wobei man es so einzurichten suchen muß, daß die gebrauchten Zwischenglieder sich gegenseitig aufheben. z. B.

Welchen Werth in preußischen Thalern haben 1000 Rubel, wenn 14 R. = 5 Ducaten, 6 Ducaten 17 sächs. Thaler und 20 s. Thaler = 21 preußische sind.

Man erhält nach obiger Auflösung

20 ſ. Th. : 17 ſ. Th. = 21 pr. : x pr.
6 Duc. : 5 Duc. = x pr. : y pr.
14 Rub. : 1000 R. = y pr. : z pr.

$20 . 6 . 14 : 17 . 5 . 1000 = 21 : x$

und $x = 1062\frac{1}{2}$ pr. Thlr.

Setzt man aber die Reductionsätze so unter einander

x pr. Thlr. = 1000 Rubel
14 Rubel = 5 Ducaten
6 Duc. = 17 ſ. Thlr.
20 ſ. Thlr. = 21 pr. Thlr.

und verbindet selbe statt drr Gleichheitszeichen durch eine Vertical-Linie, so hat man wieder den Reesischen Ansatz, den man in diesen Fällen wegen seines kettenförmigen Zusammenhanges Kettensatz heißt.

x	1000,	oder	x	25
14	5		2	5
6	17			17
20	21.		2x	2125
			x	$1062\frac{1}{2}$.

Die Regel des Ansatzes lautet demnach so:

Die unbekannte nimmt die erste Stelle links des verticalen Striches, und die Fragezahl dieselbe Stelle rechts ein; die übrigen Reductions-Gleichungen folgen in der Ordnung, daß stets die linksstehende mit der Einheitsbenennung anfängt, womit die rechts vorhergehende schließt, worauf das letzte Glied rechts mit der unbekannten gleichen Namen führt. Das übrige Verfahren bleibt dasselbe, wie oben.

Von der Richtigkeit des Ansatzes, so wie des weitern Verfahrens bei der einfachen, so wie zusammengesetzten Regel de tri, Reesischen Regel und Kettensatze kann man sich am besten dadurch überzeugen, daß man eine andere, bisher bekannte Größe, als unbekannt annimmt, und selbe sucht.

Anwendung der Progressionslehre.

131.

Die Lehre von den geometrischen Progressionen findet im bürgerlichen Leben vorzüglich ihre Anwendung bei zusammengesetzten Kapital-

rechnungen und solchen Gegenständen, die sich wie Kapitalien behandeln lassen.

Obwohl im Allgemeinen jeder Gegenstand von Werth ein Kapital genannt werden kann, so versteht man doch im gewöhnlichen Leben darunter eine Geldsumme, die einem Andern gegen eine gewisse Entschädigung auf eine bestimmte Zeit zur Benutzung überlassen wird. Diese Entschädigung heißt man die Zinse oder Interessen, und als Kapitaleinheit wird 100 fl., und als Zeiteinheit 1 Jahr zum Grunde gelegt; daher z. B. 5 Procent bedeutet: von je 100 fl. werden jährlich 5 fl. Interessen gegeben.

Einfache Zinsen nennt man jene, welche jährlich abgetragen, oder auch von mehreren Jahren, ohne selbe jedoch unterdessen als Kapital zu betrachten, zusammen genommen werden.

Zusammengesetzte oder Zinses-Zinsen heißen jene, welche jährlich zum Kapital geschlagen, und ebenfalls wieder als verzinslich betrachtet werden.

Die einfache oder gemeine Interessenrechnung hat die Aufgabe, von den 4 Größen: Kapital, Zeit, Interessen und Procenten, wenn 3 gegeben sind, die 4te zu bestimmen.

Heißt das Kapital C, die Procente p, die Zeit n, die Summe der Interessen s, so erhält man die Proportion

$$100 : C = np : s.$$

woraus die einzelnen Werthe leicht zu bestimmen sind.

Daß bei einerlei Kapital die Procente mit den Zeiten, bei einerlei Procent die Kapitalien mit den Zeiten, bei einerlei Zeit die Kapitalien mit den Procenten im umgekehrten Verhältniß stehen, ist aus der Lehre von den zusammengesetzten Proportionen bekannt.

Ein Kapital C steht n Jahre lang und wirft von q fl. p Gulden ab, welchen Werth (s) hat dieses Kapital am Ende dieser Zeit, wenn die alle Jahre fallenden Interessen zum Kapital geschlagen und stets mit verinteressirt werden.

Man erhält für's erste Jahr

$$q : C = q + p : x = \left(\frac{q+p}{q}\right) C;$$

für's zweite $q : \left(\frac{q+p}{q}\right) C = q + p : x = \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 C.$

Eben so fü's dritte $= \left(\frac{q+p}{q}\right)^3 C$, und so fort.

Für's nte Jahr, oder nach n Jahren

$$s = \left(\frac{q + p}{q}\right)^n C, \text{ oder}$$

$$\log. s = \log. C + n \log. \left(\frac{q + p}{q}\right);$$

woraus nun wieder, wenn 4 Größen bekannt sind, die 5te leicht zu bestimmen ist.

$$\log. C = \log. s - n \log. \left(\frac{q + p}{q}\right).$$

$$n = \frac{\log. s - \log. C}{\log. (q + p) - \log. q}.$$

$$\log. (q + p) = \log. q + \frac{\log. s - \log. C}{n}.$$

Man berechne hiernach:

1) Zu welcher Summe wachsen 2160 fl. nach 25 Jahren zu 6 p/o mit Zinseszinsen an?

Zu circa 9270,5 fl.

Wenn die Anzahl der Jahre beträchtlich wird, so wächst auch ein ganz unbedeutendes Kapital zu einer ungeheuern Summe.

So würde 1 fl. seit Christi Geburt zu 5 p/o mit Zinseszinsen zu einer Summe von mehr als 600 Sextillionen fl. anwachsen.

Das Berechnen der Zinseszinsen heißt Anatocismus, und ist im positiven Rechte gewöhnlich verboten.

2) Ein Forstrevier wird zu 40000 Klafter geschätzt. Welche Holzmasse hatte dasselbe, bei der Annahme, daß 100 Klafter sich jährlich um 3 vermehren, vor 20 Jahren?

22147 Klafter.

3) In wie viel Jahren verdoppelt sich ein Kapital zu 5 p/o, und in wie viel Jahren wird bei p Procent ein Kapital überhaupt mmal größer?

Ersteres geschieht in 14,2; letzteres in $\frac{\log. m}{\log. p}$ Jahren.

4) Jacob kam mit 70 Menschen nach Aegypten, und Moses zog 430 Jahre später mit 660000 Menschen (die Kinder unter 5 Jahren nicht eingerechnet) heraus. Wie stark war die jährliche Zunahme der Bevölkerung?

0,02151 der ganzen Menge, oder 2,151 von 100, oder circa 1 auf 46.

5) Für ein Haus bietet A 6000 fl., aber erst nach 4 Jahren zahlbar; B 8600 fl., nach 7 Jahren zahlbar. Welches Gebot ist für den Verkäufer vortheilhafter, wenn 4 p/o gerechnet werden?

Das 2te um 1406,47 fl.

6) A kauft um 20845 fl. ein Haus von B, und verspricht diese Summe in 5 Jahren ohne Interessen zu bezahlen. Nach einem Jahre verspricht B dem A 8 Procent, wenn er ihn bezahlen würde. Wie viel hat A zu bezahlen?

Man sagt in diesem Falle, A discontire das Kapital, und der Abzug heißt der Rabatt oder das zusammengesetzte (Leibnitz'sche) Interusurium.

Man sieht bald, daß die Aufgabe ganz einerlei ist mit: Welches Kapital wächst in 4 Jahren zu 8 p/o zu 20845 fl. an? Man findet 15321,7 fl., folglich ist der Nachlaß = 20845 — 15321,7 = 5523,3 fl.

7) Wie groß ist die Bevölkerung einer Stadt, die gegenwärtig 10000 Seelen zählt, nach 50 Jahren, wenn von 250 Menschen jährlich 10 geboren werden, und 7 sterben?

Es ist hiebei $q = 250$ und $p = 10 - 7 = 3$; mithin

$$s = \left(\frac{250 + 3}{250}\right)^{50} . 10{,}000 = 18156 \text{ Seelen.}$$

132.

Wenn zu einem auf Zinseszinse angelegten Kapital jährlich eine bestimmte Summe (m) ebenfalls auf Zinseszinsen dazu geschlagen wird, so ist nach §. 131 die Gesammtsumme nach dem

1sten Jahre $\left(\frac{q + p}{q}\right) C + m.$

2ten » $\left(\frac{q + p}{q}\right)^2 C + \left(\frac{q + p}{q}\right) m + m.$

3ten » $\left(\frac{q + p}{q}\right)^3 C + \left(\frac{q+p}{q}\right)^2 m + \left(\frac{q+p}{q}\right) m + m$

und nach n Jahren $= \left(\frac{q + p}{q}\right)^n C + \left(\frac{q + p}{q}\right)^{n-1} m +$

$\left(\frac{q + p}{q}\right)^{n-2} m + \left(\frac{q + p}{q}\right)^{n-3} m + \ldots \left(\frac{q+p}{q}\right) m + m,$

welche Reihe nach Wegnahme des ersten Gliedes eine geometrische

Progression bildet, deren erstes Glied m, und Exponent $\left(\frac{q+p}{q}\right)$, folglich Summe =

$$\left[\left(\frac{q+p}{q}\right)^n m - m\right] : \left[\left(\frac{q+p}{q}\right) - 1\right] = \frac{mq\left(\frac{q+p}{q}\right)^n - mq}{p},$$

und daher die Gesammtsumme

$$s = \left(\frac{q+p}{q}\right)^n C + \frac{mq\left(\frac{q+p}{q}\right)^n - mq}{p} =$$

$$\frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (Cp + mq) - mq}{p}, \text{ woraus}$$

$$m = \left[ps - \left(\frac{q+p}{q}\right)^n Cp\right] : \left[\left(\frac{q+p}{p}\right)^n q - q\right].$$

$$C = \left[ps + mq - \left(\frac{q+p}{q}\right)^n mq\right] : \left(\frac{q+p}{q}\right)^n p.$$

$$n = \log.\left(\frac{ps+mq}{pC+mq}\right) : \log.\left(\frac{q+p}{q}\right).$$

Wird eine bestimmte Summe m jährlich davon genommen, so darf nur in der bereits entwickelten Formel m negativ gesetzt werden, wornach man erhält

$$s = \frac{\left(\frac{q+p}{q}\right)^n (Cp - mq) + mq}{p}.$$

133.

Auf den hier entwickelten Formeln beruht auch die Berechnung der Renten.

Gibt nemlich A an B ein Kapital auf Zinseszinsen unter der Bedingung, daß B das Kapital durch jährlich zu entrichtende gleiche Summe in einer bestimmten Zeit abtragen soll, so heißt der Gläubiger der Rentirer und der Schuldner der Entrepreneur. Das Kapital die Mise, die jährlich zu entrichtende Summe die Rente, und zwar Jahr= oder Zeitrente (Annuitaet) wenn sie so lange dauert, bis das Kapital aufgezehrt ist, Leib= oder Lebensrente, wenn sie bis zum Tode des Empfängers fortgeht.

Vergleicht man die bei den Rentenberechnungen vorkommenden Größen mit der im vorhergehenden §. aufgestellten Formel, so sieht man, daß C die Mise, m die Rente und n die Dauer derselben, und $\frac{p}{q}$ das Verhältniß des Kapitals zum Zinse ausdrückt, und da nach n Jahren das Kapital abgezahlt sein muß, so ist $s = 0$.

Da der Vertrag bei der Leibrente mit dem Tode des Rentirers aufhört, so kann man die Leibrente als Zeitrente betrachten, indem man die wahrscheinliche Lebensdauer des Rentirers mit Rücksicht auf die individuelle Körperconstitution aus Mortalitäts-Tabellen beurtheilt.

Beispiele.

1. Es legt Jemand 1200 fl. auf Zinseszinsen zu 6 p/o an, und vermehrt das Kapital jährlich um 100 fl. Wie groß wird dasselbe nach 10 Jahren? 3467,1 fl.

2. Von einem Kapital von 40000 fl. zu $5\frac{1}{2}$ p/o auf Zinseszinsen angelegt, werden jährlich 3000 fl. ausgegeben. Wann wird das Kapital aufgezehrt, d. h. $s = 0$ sein? In 24,68 Jahren.

3. Ein Kaufmann war verpflichtet, 6 Jahre lang 4000 fl. zu bezahlen. Wenn er nun die Zahlung 6 Jahr unterließ, wie viel ist er schuldig, wenn die Interessen zu 4 p/o und Interessen von Interessen gerechnet werden? 27593,07 fl.

4. Von 5000 fl., die zu 5 p/o ausgeliehen sind, erhält jemand 12 Jahre lang jährlich 400 fl. Wie viel hat er noch zu fordern? 2612,6 fl.

5. Auf wie viel Jahre kann man von 9000 fl. zu 3 p/o jährlich 500 fl. beziehen? Ohngefähr 26 Jahre.

6. Eine Schuld von 20000 fl. soll in 20jährlichen gleichen Raten abgetragen werden; wie groß ist der jährliche Betrag, wenn 5 p/o gerechnet werden? 1604,85 fl.

7. Der jetzige Holzbestand eines Waldes ist 20000 Klafter, und der jährliche Zuwachs 2 p/o; die 20000 Klafter sollen in 8 Jahren so abgetrieben werden, daß jährlich gleichviel geschlagen wird. Wie groß ist der jährliche Hieb? 2730 Klafter.

8. Es übernimmt Jemand um 500 fl. eine Person zur Pflege, welche er auf 100 fl. jährlich anschlägt. Wie lange kann er selbe ohne Schaden erhalten? 5 Jahr 10 M. 22 Tage.

9. Jemand will eine Rente, die 20 Jahre lang 1000 fl. trägt, für baares Geld zu 5 p/o verkaufen. Was kann er billiger Weise verlangen? 13085,33 fl.

Ueberläßt man Jemand gegen ein Kapital den Genuß eines nutzbaren Pfandes so lange, bis derselbe für das Kapital sammt Zinsen entschädigt ist, so heißt dieser Vertrag antichretischer Vertrag.

Der Genuß des Pfandes muß aber hier eine unveränderliche Größe sein, folglich bei veränderlichem Ertrag ein Mittelwerth angenommen werden. Ergibt sich hiebei für s ein negativer Werth, so hat der Gläubiger mehr empfangen, als sein Kapital sammt Zinsen ausmacht, und muß also an den Schuldner zurückbezahlt werden.

Ist der Ertrag den Interessen des Kapitals gleich, so wird $n = \infty$, d. h. das Pfand darf nie zurückgegeben werden; ist der Ertrag kleiner, so stößt man auf den Logarithmus einer negativen Größe, der bekanntlich unmöglich ist, folglich die Aufgabe eine Ungereimtheit enthält.

A gibt dem B gegen 20000 fl. zu 5 p/o ein Landgut zur Benutzung, dessen jährlicher Ertrag im Mittel aus 18 Jahren 1500 fl. ist. Wie lange kann B dieses Landgut in Anspruch nehmen? 22,517 Jahre.

Münztabelle,
Werth im 24 Gulden-Fuß.

Land.	Met.	Benennung der Münzen.	fl.	kr.	hl.
Bayern . .	G.	Karolin	11	.	.
		Max'd'or	7	20	.
		Ducate	5	28	5,92
	S.	Kronenthaler	2	42	.
		Conventions-Thaler . . .	2	24	.
		Kopfstück	.	24	.
Dänemark u. Holstein	G.	Ducate, kurrant . . .	4	22	3,95
		Species-Ducaten . . .	5	28	5,96
		Christiand'or	9	40	5,63
	S.	Speciesthaler	2	36	7,1
		Reichsthaler, kurrant . . .	2	17	3,87
		Dänische Mark	.	26	0,44
		Lübeckische Mark . . .	.	42	3,27
England .	G.	Guinée von 21 Schilling . .	12	13	5,68
		Souverain von 20 Schilling .	11	38	5,84

Land.	Met.	Benennung der Münzen.	fl.	kr.	hl.
England .	S.	Crown oder Krone von 5 alt. Sch.	2	51	2,41
		Alter Schilling	.	34	2,08
		Krone, s. 1818	2	40	5,74
		Schilling »	.	32	1,15
		Pfd. Sterling (fingirt) . .	11	16	5,
Frankreich .	G.	40 Frankenstück	18	28	6,
	S.	Ecu oder 5 Franks . . .	2	18	4,75
		Frank	.	27	5,75
		(80 Fr. = 81 Livres).			
Genua . .	G.	Zechine	5	32	6,23
Hamburg .	G.	Ducate ad leg. Imp. . . .	5	28	5,96
		Neue Duc. der Stadt . .	5	25	7,79
	S.	Mark Banco (fingirt) . . .	.	52	0,88
		Mark nach der Lübeck. Convention	.	42	3,27
		Constitut. Reichsthlr. od. Thl. banco	2	40	1,69
Holland . .	G.	Ducate	5	30	5,47
		Ryder	14	37	2,37
		20 fl. Stücke	19	55	6,30
		Wilhelmsd'or	9	35	5,75
	S.	Gulden zu 20 Sous . . .	.	59	6,84
		Schilling (Escalin) . . .	.	17	5,91
		Ducaton oder Ryder . . .	3	9	6,96
		Ducate oder Reichsthaler . .	2	31	7,16
Japan . .	G.	Alter Kobang von 100 Maß .	23	40	4,
		Neuer » » » » .	15	6	1,44
	S.	Tigo-gin von 40 Maß . .	6	39	1,2
Kirchenstaat	G.	Pistole von Pius VI. und VII.	7	58	6,68
		Zechine, s. 1769 von Clemens XIV.	5	27	1,10
	S.	Scudo v. 10 Paoli od. 100 Bajocchi	2	29	2,09
		Testone von 30 Bajocchi . .	.	44	7,23
		Papeto von 20 » . . .	.	29	7,49
		Paolo von 10 » . . .	.	14	7,74
Mongolei .	G.	Rupie des Mogul . . .	17	53	1,76
		Pagode mit dem Halbmonde .	4	22	1,74
		» mit Stern . . .	4	19	1,36
		Ducate der holl. Compagnie .	5	22	0,73
	S.	Rupie des Mogul . . .	1	7	0,64
		» von Madras . . .	1	6	4,17
		» von Arkate . . .	1	5	3,34
		» von Pondischery . .	1	7	0,64
		Doppel-Fanon, indischer . .	.	17	3,704
		Fanon	.	8	5,85
		Silberst. der holl. Compagnie .	1	6	4,17
Neapel . .	G.	Oncia, neue, s. 1818 . .	6	.	0,52
	S.	12 Carlini von 120 Gran . .	2	21	2,92
		Ducate von 10 Carlini . .	1	57	6,43

Land.	Met.	Benennung der Münzen.	fl.	kr.	hl.
Nordam. Frei=	G.	Doppel=Adler von 10 Dollars .	25	30	2,88
staat.	S.	Dollar	2	25	1,93
Oestreich und	G.	Kaiserducate	5	28	5,92
Böhmen.		Ungarischer Ducate . . .	5	29	6,82
		Souverain	8	7	2,36
	S.	Conventions=Thaler . . .	2	24	.
		Kopfstück oder Zwanziger . .	24		.
Parma . .	G.	Zechine	5	31	1,93
		Pistole, s. 1784 . . .	10	37	6,
		» von 1786—1791 . .	10	7	1,6
		40 Lire von Marie Louise . .	18	28	6,
	S.	Ducate von 1784 und 1796 .	2	23	4,64
		Stück von 3 Lire, s. 1790 .		18	6,78
		5 Lire von Marie Louise . .	2	18	4,75
Persien . .	G.	Rupie	16	58	5,44
	S.	Doppel=Rupie von 5 Abassis .	2	15	6
		Mahmudi		13	3,54
		Larin		28	4,4
Portugal .	G.	Moeda doura Lisbonnina . .	15	42	.
		Meia dobra (portug.) . .	20	54	6,72
		Stück von 16 Testons . .	5	13	5,68
	S.	Cruzado, alte	1	31	3,76
		» neue	1	21	3,93
		1000 Reis	2	49	6,20
Preußen .	G.	Ducate	5	26	2
		Friedrichsd'or	9	36	6,27
	S.	Thaler zu 30 Silbergroschen .	1	42	4
		5 Groschenstück . . .		17	1,5
		Silbergroschen innerer Werth .		2	6,18
Ragusa . .	S.	Talaro=Ragusino . . .	1	48	0,81
		Ducate		37	7,79
		12 Grossetti		11	2,91
Rußland .	G.	Ducate bis 1763 . . .	5	26	6,41
		= von 1763 . . .	5	21	2,06
		Imperial von 10 Rubel bis 1763	24	11	7,04
		» seit 1763	19	4	4
	S.	Rubel von 100 Kopecken bis 1762	2	7	7,25
		» von 1763—1807	1	50	7
Sachsen .	G.	Ducate	5	28	5,96
		Doppel=Augustusd'or . .	19	9	7,68
	S.	Conventionsthaler seit 1763 .	2	24	.
		Fingirter Thaler zu 24 Groschen	1	48	.
Sardinien .	G.	Carino seit 1768 . . .	22	47	3,2
		Pistole	13	4	4,64
	S.	Scudo seit 1768 . . .	2	10	1,98
		Neuer Scudo seit 1816 à 5 Lire	2	18	4,75

Land.	Met.	Benennung der Münzen.	fl.	kr.	hl.
Savoyen u. Piemont	G.	Zechine	5	30	2,68
		Neue Doppelpistole à 24 Lire .	13	51	4,5
		Carino seit 1755 . . .	69	17	6,5
		Neue Pistole von 20 Lire . .	9	14	3,75
	S.	Scudo von 6 Lire seit 1755 .	3	15	7,77
		Neuer Scudo von 5 Lire . .	2	18	4,75
Schweden	G.	Ducate	5	24	1,84
	S.	Speciesreichsthaler zu 48 Schilling	2	39	4,65
Schweiz	G.	Stück von 32 schweiz. Frank. .	22	.	1,92
		Ducate von Zürch . . .	5	26	2
		» » Bern . . .	5	22	5,15
		Pistole von Bern . . .	10	58	4,48
	S.	Thaler v. Basel zu 30 Batzen od. 2 fl.	2	6	3,16
		Berner Frank	.	41	4,62
		Thaler von Zürch seit 1781 .	2	10	2,22
		Thaler v. Basel u. Soloth. zu 40 Batz.	2	43	4,28
		4 Frankenstück von Bern . .	2	42	7,87
		» » Schwiz .	2	46	2,5
Sicilien	G.	Oncia seit 1748 . . .	6	20	4,2
	S.	Scudo von 12 Tarini . .	2	21	2,73
Spanien	G.	Pistole od. Dublon v. 8 Thl. (Kronen) bis 1786	38	46	3,52
		seit 1786	37	39	2,88
		Spanischer Thaler . . .	4	44	7,36
	S.	Piaster seit 1772 . . .	2	30	4,08
Toscana	G.	Ruspone oder 3 Zechinen . .	16	39	.
		Zechine all' effigie . . .	5	33	.
		Rosine	9	57	0,52
	S.	Francoscone von 20 Paoli . .	2	35	4
Türkei .	G.	Zechine Zermahbud v. Sultan Abdul Hamet 1774	4	1	5,63
		Nisfia, 1/2 Zermahbud . .	2	.	6,895
		Rupie, 1/4 Zechine Fondukli .	1	7	5,77
		Zechine Zermahbud von Selim III.	3	22	2,75
	S.	Allmichleck von 60 Paras seit 1771	1	37	4,52
		Yaremleck v. 20 P. od. 60 Asper 1757	.	27	3,53
		Rup v. 10 P. oder 30 A. 1773	.	13	5,765
		Para = 3 Asper . . .	.	1	0,86
		Asper = 1/120 Piaster . .	.	.	2,94
		Piaster von 40 P., 120 Asper .	.	55	3,5
		5 Piasterstück von Mahmud .	1	54	5,28
		Beutel v. 500 Piaster (Keser) .	461	53	6
		Beutel Gold (Kitze) = 60 Keser	27713	45	.
Venedig	G.	Souverain seit 1823 . . .	16	13	6
	S.	Oestreich. Scudo von 6 Lire .	2	24	1
		Oestreich. Lira	.	24	.

Tafel

der

Logarithmen.

N	*Log.*	*N*	*Log.*	*N*	*Log.*	*N*	*Log.*	*N*	*Log.*
0	inf. neg.								
1	0,000000,0	21	1,322219,3	41	1,612783,9	61	1,785329,8	81	1,908485,0
2	0,301030,0	22	1,342422,7	42	1,623249,3	62	1,792391,7	82	1,913815,9
3	0,477121,3	23	1,361727,8	43	1,633468,5	63	1,799340,5	83	1,919078,1
4	0,602060,0	24	1,380211,2	44	1,643452,7	64	1,806180,0	84	1,924279,3
5	0,698970,0	25	1,397940,0	45	1,653212,5	65	1,812913,4	85	1,929418,9
6	0,778151,3	26	1,414973,3	46	1,662757,8	66	1,819543,9	86	1,934498,5
7	0,845098,0	27	1,431363,8	47	1,672097,9	67	1,826074,8	87	1,939519,3
8	0,903090,0	28	1,447158,0	48	1,681241,2	68	1,832508,9	88	1,944482,7
9	0,954242,5	29	1,462398,0	49	1,690196,1	69	1,838849,1	89	1,949390,0
10	1,000000,0	30	1,477121,3	50	1,698970,0	70	1,845098,0	90	1,954242,5
11	1,041392,7	31	1,491361,7	51	1,707570,2	71	1,851258,3	91	1,959041,4
12	1,079181,2	32	1,505150,0	52	1,716003,3	72	1,857332,5	92	1,963787,8
13	1,113943,4	33	1,518513,9	53	1,724275,9	73	1,863322,9	93	1,968482,9
14	1,146128,0	34	1,531478,9	54	1,732393,8	74	1,869231,7	94	1,973127,9
15	1,176091,3	35	1,544068,0	55	1,740362,7	75	1,875061,3	95	1,977725,6
16	1,204120,0	36	1,556302,5	56	1,748188,0	76	1,880815,6	96	1,982271,2
17	1,230448,9	37	1,568201,7	57	1,755874,9	77	1,886490,7	97	1,986771,7
18	1,255272,5	38	1,579783,6	58	1,763428,0	78	1,892094,6	98	1,991226,1
19	1,278753,6	39	1,591064,6	59	1,770852,0	79	1,897627,1	99	1,995635,2
20	1,301030,0	40	1,602060,0	60	1,778151,3	80	1,903090,0	100	2,000000,0

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
											454
100	000000,0	0454,1	0867,7	1300,9	1733,7	2166,1	2598,0	3029,5	3460,5	3891,2	430
101	4321,4	4751,2	5180,5	5609,4	6038,0	6466,0	6895,7	7321,0	7747,8	8174,2	426
102	8600,2	9025,7	9450,9	9875,6	*0300,0	*0723,9	*1147,4	*1570,4	*1993,1	*2415,4	422
103	012857,2	3258,7	3679,7	4100,3	4520,5	4940,3	5359,8	5778,8	6197,4	6615,5	419
104	7033,3	7450,7	7867,7	8284,3	8700,5	9116,3	9531,7	9946,7	*0361,3	*0775,5	414
105	021189,3	1602,7	2015,7	2428,4	2840,6	3252,5	3663,9	4075,0	4485,7	4896,0	410
106	5305,9	5715,4	6124,5	6533,3	6941,6	7349,6	7757,2	8164,4	8571,3	8977,7	407
107	9383,8	9789,5	*0194,8	*0599,7	*1004,3	*1408,5	*1812,3	*2215,7	*2618,8	*3021,4	402
108	035423,8	5825,7	4227,3	4628,5	5029,3	5429,7	5829,8	6229,5	6628,9	7027,9	399
109	7426,5	7824,8	8222,6	8620,2	9017,3	9414,1	9810,6	*0206,6	*0602,3	*0997,7	396
110	041392,7	1787,3	2181,6	2575,5	2969,1	3362,3	3755,1	4147,6	4539,8	4931,5	392
111	5323,0	5714,1	6104,8	6495,2	6885,2	7274,9	7664,2	8053,2	8441,8	8830,1	388
112	9218,0	9605,6	9992,9	*0379,8	*0766,3	*1152,5	*1538,4	*1923,9	*2309,1	*2693,9	385
113	053078,4	3462,6	3846,4	4229,9	4613,1	4995,9	5378,3	5760,5	6142,3	6523,7	382
114	6904,9	7285,6	7666,1	8046,2	8426,0	8805,5	9184,6	9563,4	9941,9	*0320,0	378
115	060697,8	1075,3	1452,5	1829,3	2205,8	2582,0	2957,8	3333,4	3708,6	4083,4	374
116	4458,0	4832,2	5206,1	5579,7	5953,0	6325,9	6698,5	7070,9	7442,8	7814,5	372

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
434	43	87	130	174	217	260	304	347	391	402	40	80	121	161	201	241	281	322	362
433	43	87	130	173	217	260	303	346	390	401	40	80	120	160	201	241	281	321	361
432	43	86	130	173	216	259	302	346	389	400	40	80	120	160	200	240	280	320	360
431	43	86	129	172	216	259	302	345	388	399	40	80	120	160	200	239	279	319	359
430	43	86	129	172	215	258	301	344	387	398	40	80	119	159	199	239	279	318	358
429	43	86	129	172	215	257	300	343	386	397	40	79	119	159	199	238	278	318	357
428	43	86	128	171	214	257	300	342	385	396	40	79	119	158	198	238	277	317	356
427	43	85	128	171	214	256	299	342	384	395	40	79	119	158	198	237	277	316	356
426	43	85	128	170	213	256	298	341	383	394	39	79	118	158	197	236	276	315	355
425	43	85	128	170	213	255	298	340	383	393	39	79	118	157	197	236	275	314	354
424	42	85	127	170	212	254	297	339	382	392	39	78	118	157	196	235	274	314	353
423	42	85	127	169	212	254	296	338	381	391	39	78	117	156	196	235	274	313	352
422	42	84	127	169	211	253	295	338	380	390	39	78	117	156	195	234	273	312	351
421	42	84	126	168	211	253	295	337	379	389	39	78	117	156	195	233	272	311	350
420	42	84	126	168	210	252	294	336	378	388	39	78	116	155	194	233	272	310	349
419	42	84	126	168	210	251	293	335	377	387	39	77	116	155	194	232	271	310	348
418	42	84	125	167	209	251	293	334	376	386	39	77	116	154	193	232	270	309	347
417	42	83	125	167	209	250	292	334	375	385	39	77	116	154	193	231	270	308	347
416	42	83	125	166	208	250	291	333	374	384	38	77	115	154	192	230	269	307	346
415	42	83	125	166	208	249	291	332	374	383	38	77	115	153	192	230	268	306	345
414	41	83	124	166	207	248	290	331	373	382	38	76	115	153	191	229	267	306	344
413	41	83	124	165	207	248	289	330	372	381	38	76	114	152	191	229	267	305	343
412	41	82	124	165	206	247	288	330	371	380	38	76	114	152	190	228	266	304	342
411	41	82	123	164	206	247	288	329	370	379	38	76	114	152	190	227	265	303	341
410	41	82	123	164	205	246	287	328	369	378	38	76	113	151	189	227	265	302	340
409	41	82	123	164	205	245	286	327	368	377	38	75	113	151	189	226	264	302	339
408	41	82	122	163	204	245	286	326	367	376	38	75	113	150	188	226	263	301	338
407	41	81	122	163	204	244	285	326	366	375	38	75	113	150	188	225	263	300	338
406	41	81	122	162	203	244	284	325	365	374	37	75	112	150	187	224	262	299	337
405	41	81	122	162	203	243	284	324	365	373	37	75	112	149	187	224	261	298	336
404	40	81	121	162	202	242	283	323	364	372	37	74	112	149	186	223	260	298	335
403	40	81	121	161	202	242	282	322	363										

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
											571
117	068185,9	8556,9	8927,6	9298,0	9668,1	*0037,9	*0407,3	*0776,5	*1145,5	*1513,8	569
118	071882,0	2249,9	2617,5	2984,7	3351,7	3718,4	4084,7	4450,7	4816,4	5181,9	366
119	5547,0	5911,8	6276,3	6640,4	7004,3	7367,9	7731,2	8094,2	8456,8	8819,2	362
120	9181,2	9545,0	9904,5	*0265,6	*0626,5	*0987,0	*1347,3	*1707,3	*2066,9	*2426,3	359
121	082785,4	3144,1	3502,6	3860,8	4218,7	4576,3	4933,6	5290,6	5647,3	6003,7	357
122	6559,8	6715,7	7071,2	7426,5	7781,4	8136,1	8490,5	8844,6	9198,4	9551,9	354
123	9905,1	*0258,1	*0610,7	*0963,1	*1315,2	*1667,0	*2018,5	*2369,7	*2720,6	*3071,3	350
124	093421,7	3771,8	4121,6	4471,1	4820,4	5169,4	5518,0	5866,5	6214,6	6562,4	347
125	6910,0	7257,3	7604,3	7951,1	8297,5	8643,7	8989,6	9335,3	9680,6	*0025,7	345
126	100370,5	0715,1	1059,4	1403,4	1747,1	2090,5	2433,7	2776,6	3119,3	3461,6	343
127	3803,7	4145,6	4487,1	4828,4	5169,4	5510,2	5850,7	6190,9	6530,9	6870,5	340
128	7210,0	7549,1	7888,0	8226,7	8565,0	8903,1	9241,0	9578,5	9915,9	*0252,9	337
129	110589,7	0926,2	1262,5	1598,5	1934,3	2269,8	2605,0	2940,0	3274,7	3609,2	334
130	3943,4	4277,3	4611,0	4944,4	5277,6	5610,5	5943,2	6275,6	6607,7	6939,6	332
131	7271,3	7602,7	7933,8	8264,7	8595,4	8925,8	9255,9	9585,8	9915,4	*0244,8	330
132	120573,9	0902,8	1231,5	1559,8	1888,0	2215,9	2543,5	2870,9	3198,1	3525,0	327
133	3851,6	4178,1	4504,2	4830,1	5155,8	5481,3	5806,5	6131,4	6456,1	6780,6	325
134	7104,8	7428,8	7752,5	8076,0	8399,3	8722,3	9045,1	9367,6	9689,9	*0011,9	322
135	130333,8	0655,3	0976,7	1297,8	1618,7	1939,3	2259,7	2579,8	2899,8	3219,5	319
136	3538,9	3858,1	4177,1	4495,9	4814,4	5132,7	5450,7	5768,5	6086,1	6403,4	317

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
371	37	74	111	148	186	223	260	297	334	343	34	69	103	137	172	206	240	274	309
370	37	74	111	148	185	222	259	296	333	342	34	68	103	137	171	205	239	274	308
369	37	74	111	148	185	221	258	295	332	341	34	68	102	136	171	205	239	273	307
368	37	74	110	147	184	221	258	294	331	340	34	68	102	136	170	204	238	272	306
367	37	73	110	147	184	220	257	294	330	339	34	68	102	136	170	203	237	271	305
366	37	73	110	146	183	220	256	293	329	338	34	68	101	135	169	203	237	270	304
365	37	73	110	146	183	219	256	292	329	337	34	67	101	135	169	202	236	270	303
364	36	73	109	146	182	218	255	291	328	336	34	67	101	134	168	202	235	269	302
363	36	73	109	145	182	218	254	290	327	335	34	67	101	134	168	201	235	268	302
362	36	72	109	145	181	217	253	290	326	334	33	67	100	134	167	200	234	267	301
361	36	72	108	144	181	217	253	289	325	333	33	67	100	133	167	200	233	266	300
360	36	72	108	144	180	216	252	288	324	332	33	66	100	133	166	199	232	266	299
359	36	72	108	144	180	215	251	287	323	331	33	66	99	132	166	199	232	265	298
358	36	72	107	143	179	215	251	286	322	330	33	66	99	132	165	198	231	264	297
357	36	71	107	143	179	214	250	286	321	329	33	66	99	132	165	197	230	263	296
356	36	71	107	142	178	214	249	285	320	328	33	66	98	131	164	197	230	262	295
355	36	71	107	142	178	213	249	284	320	327	33	65	98	131	164	196	229	262	294
354	35	71	106	142	177	212	248	283	319	326	33	65	98	130	163	195	228	261	293
353	35	71	106	141	177	212	247	282	318	325	33	65	98	130	163	195	228	260	293
352	35	70	106	141	176	211	246	282	317	324	32	65	97	130	162	194	227	259	292
351	35	70	105	140	176	211	246	281	316	323	32	65	97	129	162	194	226	258	291
350	35	70	105	140	175	210	245	280	315	322	32	64	97	129	161	193	225	258	290
349	35	70	105	140	175	209	244	279	314	321	32	64	96	128	161	193	225	257	289
348	35	70	104	139	174	209	244	278	313	320	32	64	96	128	160	192	224	256	288
347	35	69	104	139	174	208	243	278	312	319	32	64	96	128	160	191	223	255	287
346	35	69	104	138	173	208	242	277	311	318	32	64	95	127	159	191	223	254	286
345	35	69	104	138	173	207	242	276	311	317	32	63	95	127	159	190	222	254	285
344	34	69	103	138	172	206	241	275	310										

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
											316
137	136720,6	7037,5	7354,1	7670,5	7986,7	8302,7	8618,4	8933,9	9249,2	9564,3	315
138	9879,1	*0193,7	*0508,0	*0822,2	*1136,1	*1449,8	*1763,2	*2076,5	*2389,5	*2702,2	313
139	143014,8	3327,1	3639,2	3951,1	4262,8	4574,2	4885,4	5196,4	5507,2	5817,7	311
140	6128,0	6438,1	6748,0	7057,7	7367,1	7676,3	7985,3	8294,1	8602,7	8911,0	308
141	9219,1	9527,0	9834,7	*0142,2	*0449,4	*0756,4	*1063,3	*1369,9	*1676,2	*1982,4	306
142	152288,3	2594,1	2899,6	3204,9	3510,0	3814,9	4119,5	4424,0	4728,2	5032,2	304
143	5336,0	5639,6	5945,0	6246,2	6549,2	6851,9	7154,4	7456,8	7758,9	8060,8	302
144	8362,5	8664,0	8965,3	9266,3	9567,2	9867,8	*0168,3	*0468,5	*0768,6	*1068,4	299
145	161368,0	1667,4	1966,6	2265,6	2564,4	2863,0	3161,4	3459,6	3757,5	4055,3	297
146	4352,9	4650,2	4947,4	5244,3	5541,1	5837,6	6134,0	6430,1	6726,1	7021,8	296
147	7317,3	7612,7	7907,8	8202,7	8497,5	8792,0	9086,4	9380,5	9674,4	9968,2	294
148	170261,7	0555,1	0848,2	1141,2	1433,9	1726,5	2018,8	2311,0	2602,9	2894,7	292
149	3186,3	3477,6	3768,8	4059,8	4350,6	4641,2	4931,6	5221,8	5511,8	5801,6	290
150	6091,3	6380,7	6669,9	6959,0	7247,8	7536,5	7825,0	8113,3	8401,3	8689,2	288
151	8976,9	9264,5	9551,8	9838,9	*0125,9	*0412,6	*0699,2	*0985,6	*1271,8	*1557,8	286
152	181843,6	2129,2	2414,7	2699,9	2985,0	3269,8	3554,5	3839,0	4123,4	4407,5	285
153	4691,4	4975,2	5258,8	5542,2	5825,4	6108,4	6391,2	6673,9	6956,3	7238,6	283
154	7520,7	7802,6	8084,4	8365,9	8647,3	8928,5	9209,5	9490,3	9771,0	*0051,4	280
155	190331,7	0611,8	0891,7	1171,5	1451,0	1730,4	2009,6	2288,6	2567,5	2846,1	278
156	3124,6	3402,9	3681,0	3959,0	4236,7	4514,3	4791,8	5069,0	5346,1	5622,9	277
157	5899,7	6176,2	6452,5	6728,7	7004,7	7280,6	7556,2	7831,7	8107,0	8382,1	275
158	8657,1	8931,9	9206,5	9480,9	9755,2	*0029,3	*0303,2	*0576,9	*0850,5	*1123,9	273
159	201397,1	1670,2	1943,1	2215,8	2488,3	2760,7	3032,9	3304,9	3576,8	3848,5	272
160	4120,0	4391,3	4662,5	4933,5	5204,4	5475,0	5745,5	6015,9	6286,0	6556,0	270

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
316	32	63	95	126	158	190	221	253	284
315	32	63	95	126	158	189	221	252	284
314	31	63	94	126	157	188	220	251	283
313	31	63	94	125	157	188	219	250	282
312	31	63	94	125	156	187	218	250	281
311	31	62	93	124	156	187	218	249	280
310	31	62	93	124	155	186	217	248	279
309	31	62	93	124	155	185	216	247	278
308	31	62	92	123	154	185	216	246	277
307	31	61	92	123	154	184	215	246	276
306	31	61	92	122	153	184	214	245	275
305	31	61	92	122	153	183	214	244	275
304	30	61	91	122	152	182	213	243	274
303	30	61	91	121	152	182	212	242	273
302	30	60	91	121	151	181	211	242	272
301	30	60	90	120	151	181	211	241	271
300	30	60	90	120	150	180	210	240	270
299	30	60	90	120	150	179	209	239	269
298	30	60	89	119	149	179	209	238	268
297	30	59	89	119	149	178	208	238	267
296	30	59	89	118	148	178	207	237	266
295	30	59	89	118	148	177	207	236	266
294	29	59	88	118	147	176	206	235	265
293	29	59	88	117	147	176	205	234	264

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
292	29	58	88	117	146	175	204	234	263
291	29	58	87	116	146	175	204	233	262
290	29	58	87	116	145	174	203	232	261
289	29	58	87	116	145	173	202	231	260
288	29	58	86	115	144	173	202	230	259
287	29	57	86	115	144	172	201	230	258
286	29	57	86	114	143	172	200	229	257
285	29	57	86	114	143	171	200	228	257
284	28	57	85	114	142	170	199	227	256
283	28	57	85	113	142	170	198	226	255
282	28	56	85	113	141	169	197	226	254
281	28	56	84	112	141	169	197	225	253
280	28	56	84	112	140	168	196	224	252
279	28	56	84	112	140	167	195	223	251
278	28	56	83	111	139	167	195	222	250
277	28	55	83	111	139	166	194	222	249
276	28	55	83	110	138	166	193	221	248
275	28	55	83	110	138	165	193	220	248
274	27	55	82	110	137	164	192	219	247
273	27	55	82	109	137	164	191	218	246
272	27	54	82	109	136	163	190	218	245
271	27	54	81	108	136	163	190	217	244
270	27	54	81	108	135	162	189	216	243

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
											270
161	206825,9	7095,5	7365,0	7634,4	7903,5	8172,5	8441,4	8710,0	8978,5	9246,8	268
162	9515,0	9783,0	*0050,8	*0318,5	*0586,0	*0855,4	*1120,5	*1387,6	*1654,4	*1921,1	267
163	212187,6	2454,0	2720,2	2986,2	3252,1	3517,8	3783,3	4048,7	4313,9	4579,0	265
164	4843,8	5108,6	5373,2	5637,6	5901,8	6165,9	6429,8	6693,6	6957,2	7220,7	264
165	7483,9	7747,1	8010,0	8272,9	8535,5	8798,0	9060,3	9322,5	9584,5	9846,4	261
166	220108,1	0369,6	0631,0	0892,2	1153,3	1414,2	1675,0	1935,6	2196,0	2456,3	260
167	2716,5	2976,4	3236,5	3495,9	3755,5	4014,8	4274,0	4533,1	4792,0	5050,7	259
168	5309,3	5567,7	5826,0	6084,1	6342,1	6599,9	6857,6	7115,1	7372,4	7629,6	258
169	7886,7	8143,6	8400,4	8657,0	8913,4	9169,7	9425,8	9681,8	9937,7	*0193,4	255
170	230448,9	0704,3	0959,6	1214,6	1469,6	1724,4	1979,0	2233,5	2487,9	2742,1	254
171	2996,1	3250,0	3503,8	3757,4	4010,8	4264,1	4517,3	4770,3	5023,2	5275,9	253
172	5528,4	5780,9	6033,1	6285,3	6537,3	6789,1	7040,8	7292,3	7543,7	7795,0	251
173	8046,1	8297,1	8547,9	8798,6	9049,1	9299,5	9549,7	9799,8	*0049,8	*0299,6	250
174	240549,2	0798,8	1048,2	1297,4	1546,5	1795,4	2044,2	2292,9	2541,4	2789,8	249
175	3038,0	3286,1	3534,1	3781,9	4029,6	4277,1	4524,5	4771,8	5018,9	5265,8	247
176	5512,7	5759,4	6005,9	6252,3	6498,6	6744,7	6990,7	7236,5	7482,3	7727,8	246
177	7973,3	8218,6	8463,7	8708,7	8953,6	9198,4	9443,0	9687,4	9931,8	*0175,9	244
178	250420,0	0665,9	0907,7	1151,3	1394,9	1638,2	1881,3	2124,6	2367,5	2610,3	242
179	2853,0	3095,6	3338,0	3580,3	3822,4	4064,5	4306,3	4548,1	4789,7	5031,2	241
180	5272,5	5513,7	5754,8	5995,7	6236,5	6477,2	6717,7	6958,2	7198,4	7438,6	240
181	7678,6	7918,5	8158,2	8397,8	8637,3	8876,6	9115,8	9354,9	9593,9	9832,7	239
182	260071,4	0309,9	0548,4	0786,7	1024,8	1262,9	1500,8	1738,5	1976,2	2213,7	238
183	2451,1	2688,3	2925,3	3162,3	3399,3	3636,1	3872,7	4109,2	4345,5	4581,7	236
184	4817,8	5053,8	5289,6	5525,3	5760,9	5996,4	6231,7	6466,9	6702,0	6936,9	235
185	7171,7	7406,4	7641,0	7875,4	8109,7	8343,9	8578,0	8811,9	9045,7	9279,4	233
186	9512,9	9746,4	9979,7	*0212,9	*0445,9	*0678,8	*0911,6	*1144,3	*1376,9	*1609,3	232
187	271841,6	2073,8	2305,8	2537,8	2769,6	3001,3	3232,8	3464,3	3695,6	3926,8	231

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
269	27	54	81	108	135	161	188	215	242	249	25	50	75	100	125	149	174	199	224
268	27	54	80	107	134	161	188	214	241	248	25	50	74	99	124	149	174	198	223
267	27	53	80	107	134	160	187	214	240	247	25	49	74	99	124	148	173	198	222
266	27	53	80	106	133	160	186	213	239	246	25	49	74	98	123	148	172	197	221
265	27	53	80	106	133	159	186	212	239	245	25	49	74	98	123	147	172	196	221
264	26	53	79	106	132	158	185	211	238	244	24	49	73	98	122	146	171	195	220
263	26	53	79	105	132	158	184	210	237	243	24	49	73	97	122	146	170	194	219
262	26	52	79	105	131	157	183	210	236	242	24	48	73	97	121	145	169	194	218
261	26	52	78	104	131	157	183	209	235	241	24	48	72	96	121	145	169	193	217
260	26	52	78	104	130	156	182	208	234	240	24	48	72	96	120	144	168	192	216
259	26	52	78	104	130	155	181	207	233	239	24	48	72	96	120	143	167	191	215
258	26	52	77	103	129	155	181	206	232	238	24	48	71	95	119	143	167	190	214
257	26	51	77	103	129	154	180	206	231	237	24	47	71	95	119	142	166	190	213
256	26	51	77	102	128	154	179	205	230	236	24	47	71	94	118	142	165	189	212
255	26	51	77	102	128	153	179	204	230	235	24	47	71	94	118	141	165	188	212
254	25	51	76	102	127	152	178	203	229	234	23	47	70	94	117	140	164	187	211
253	25	51	76	101	127	152	177	202	228	233	23	47	70	93	117	140	163	186	210
252	25	50	76	101	126	151	176	202	227	232	23	46	70	93	116	139	162	186	209
251	25	50	75	100	126	151	176	201	226	231	23	46	69	92	116	139	162	185	208
250	25	50	75	100	125	150	175	200	225										

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
											231
188	274157,8	4388,8	4619,6	4850,3	5080,9	5311,4	5541,7	5771,9	6002,0	6232,0	230
189	6461,8	6691,5	6921,1	7150,6	7380,0	7609,2	7838,3	8067,3	8296,2	8525,0	229
190	8753,6	8982,1	9210,5	9438,8	9666,9	9895,0	*0122,9	*0350,7	*0578,4	*0805,9	228
191	281033,4	1260,7	1487,9	1715,0	1941,9	2168,8	2395,5	2622,1	2848,6	3075,0	226
192	3301,2	3527,4	3753,4	3979,3	4205,1	4430,7	4656,3	4881,7	5107,0	5332,2	225
193	5557,3	5782,3	6007,1	6231,9	6456,5	6681,0	6905,4	7129,6	7353,8	7577,8	224
194	7801,7	8025,5	8249,2	8472,8	8696,3	8919,6	9142,8	9366,0	9589,0	9811,8	223
195	290034,6	0257,3	0479,8	0702,2	0924,6	1146,8	1368,9	1590,8	1812,7	2034,4	221
196	2256,1	2477,6	2699,0	2920,3	3141,5	3362,6	3583,5	3804,4	4025,1	4245,7	
197	4466,2	4686,6	4906,9	5127,1	5347,1	5567,1	5786,9	6006,7	6226,3	6445,8	220
198	6665,2	6884,5	7103,7	7322,7	7541,7	7760,5	7979,2	8197,9	8416,4	8634,8	219
199	8853,1	9071,3	9289,3	9507,3	9725,2	9942,9	*0160,5	*0378,1	*0595,5	*0812,8	218
200	301030,0	1247,1	1464,1	1680,9	1897,7	2114,4	2330,9	2547,4	2763,7	2979,9	216
201	3196,1	3412,1	3628,0	3843,8	4059,5	4275,1	4490,5	4705,9	4921,2	5136,3	215
202	5351,4	5566,3	5781,2	5995,9	6210,5	6425,0	6639,4	6853,7	7068,0	7282,0	214
203	7496,0	7709,9	7923,7	8137,4	8350,9	8564,4	8777,8	8991,0	9204,2	9417,2	213
204	9630 2	9843,0	*0055,7	*0268,4	*0480,9	*9693,3	*0905,6	*1117,8	*1330,0	*1542,0	212
205	311753,9	1965,7	2177,4	2388,9	2600,4	2811,8	3023,1	3234,3	3445,4	3656,3	211
206	3867,2	4078,0	4288,7	4499,2	4709,7	4920,1	5130,3	5340,5	5550,5	5760,5	210
207	5970,3	6180,1	6389,8	6599,3	6808,8	7018,1	7227,3	7436,5	7645,5	7854,5	209
208	8063,3	8272,1	8480,7	8689,3	8897,7	9106,1	9314,3	9522,4	9730,5	9958,4	208
209	320146,3	0354,0	0561,7	0769,2	0976,7	1184,0	1391,3	1598,4	1805,5	2012,4	207
210	2219,3	2426,1	2632,7	2839,3	3045,7	3252,1	3458,4	3664,5	3870,6	4076,6	206
211	4282,5	4488,2	4693,9	4899,5	5105,0	5310,4	5515,7	5720,9	5926,0	6131,0	205
212	6335,9	6540,7	6745,4	6950,0	7154,5	7358,9	7563,3	7767,5	7971,6	8175,7	204
213	8379,6	8583,4	8787,2	8990,9	9194,4	9397,9	9601,2	9804,5	*0007,7	*0210,8	203
214	330413,8	0616,7	0819,5	1022,2	1224,8	1427,3	1629,7	1832,0	2034,3	2236,4	202
215	2438,5	2640,4	2842,3	3044,0	3245,7	3447,3	3648,8	3850,1	4051,4	4252,6	201
216	4453,8	4654,8	4855,7	5056,5	5257,3	5457,9	5658,5	5858,9	6059,3	6259,6	200
217	6459,7	6659,8	6859,8	7059,7	7259,5	7459,3	7658,9	7858,4	8057,9	8257,2	199
218	8456,5	8655,7	8854,7	9053,7	9252,6	9451,4	9650,2	9848,8	*0047,3	*0245,8	
219	340444,1	0642,4	0840,5	1038,6	1236,6	1434,5	1632,3	1830,1	2027,7	2225,2	197

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
231	23	46	69	92	116	139	162	185	208	213	21	43	64	85	107	128	149	170	192
230	23	46	69	92	115	138	161	184	207	212	21	42	64	85	106	127	148	170	191
229	23	46	69	92	115	137	160	183	206	211	21	42	63	84	106	127	148	169	190
228	23	46	68	91	114	137	160	182	205	210	21	42	63	84	105	126	147	168	189
227	23	45	68	91	114	136	159	182	204	209	21	42	63	84	105	125	146	167	188
226	23	45	68	90	113	136	158	181	203	208	21	42	62	83	104	125	146	166	187
225	23	45	68	90	113	135	158	180	203	207	21	41	62	83	104	124	145	166	186
224	22	45	67	90	112	134	157	179	202	206	21	41	62	82	103	124	144	165	185
223	22	45	67	89	112	134	156	178	201	205	21	41	62	82	103	123	144	164	185
222	22	44	67	89	111	133	155	178	200	204	20	41	61	82	102	122	143	163	184
221	22	44	66	88	111	133	155	177	199	203	20	41	61	81	102	122	142	162	183
220	22	44	66	88	110	132	154	176	198	202	20	40	61	81	101	121	141	162	182
219	22	44	66	88	110	131	153	175	197	201	20	40	60	80	101	121	141	161	181
218	22	44	65	87	109	131	153	174	196	200	20	40	60	80	100	120	140	160	180
217	22	43	65	87	109	130	152	174	195	199	20	40	60	80	100	119	139	159	179
216	22	43	65	86	108	130	151	173	194	198	20	40	59	79	99	119	139	158	178
215	22	43	65	86	108	129	151	172	194	197	20	39	59	79	99	118	138	158	177
214	21	43	64	86	107	128	150	171	193										

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
											197
220	342422,7	2620,0	2817,3	3014,5	3211,6	3408,6	3605,5	3802,3	3999,1	4195,7	196
221	4592,3	4588,7	4785,1	4981,4	5177,6	5373,7	5569,8	5765,7	5961,5	6157,3	195
222	6553,0	6548,6	6744,1	6939,5	7134,8	7330,0	7525,2	7720,2	7915,2	8110,1	
223	8504,9	8499,6	8694,2	8888,7	9083,2	9277,5	9471,8	9666,0	9860,1	*0054,1	194
224	350248,0	0441,9	0635,6	0829,3	1022,9	1216,3	1409,8	1603,1	1796,3	1989,5	193
225	2182,5	2375,5	2568,4	2761,2	2953,9	3146,5	3339,1	3531,6	3723,9	3916,2	192
226	4108,4	4300,6	4492,6	4684,6	4876,4	5068,2	5259,9	5451,5	5643,1	5834,5	191
227	6025,9	6217,1	6408,3	6599,4	6790,5	6981,4	7172,3	7363,0	7553,7	7744,3	190
228	7934,8	8125,3	8315,6	8505,9	8696,1	8886,2	9076,2	9266,2	9456,0	9645,8	
229	9835,5	*0025,1	*0214,6	*0404,1	*0593,4	*0782,7	*0971,9	*1161,0	*1350,0	*1539,0	189
230	361727,8	1916,6	2105,3	2293,9	2482,5	2670,9	2859,3	3047,6	3235,8	3423,9	188
231	3612,0	3799,9	3987,8	4175,6	4363,4	4551,0	4738,6	4926,0	5113,4	5300,7	187
232	5488,0	5675,1	5862,2	6049,2	6236,1	6423,0	6609,7	6796,4	6983,0	7169,5	186
233	7355,9	7542,3	7728,5	7914,7	8100,9	8286,9	8472,8	8658,7	8844,5	9030,2	185
234	9215,9	9401,4	9586,9	9772,3	9957,6	*0142,8	*0328,0	*0513,1	*0698,1	*0883,0	
235	371067,9	1252,6	1437,3	1621,9	1806,5	1990,9	2175,3	2359,6	2543,8	2727,9	184
236	2912,0	3096,0	3279,9	3463,7	3647,5	3831,1	4014,7	4198,3	4381,7	4565,1	183
237	4748,3	4931,6	5114,7	5297,7	5480,7	5663,6	5846,4	6029,2	6211,9	6394,4	182
238	6577,0	6759,4	6941,8	7124,0	7306,3	7488,4	7670,4	7852,4	8034,3	8216,1	
239	8397,9	8579,6	8761,2	8942,7	9124,1	9305,5	9486,8	9668,0	9849,2	*0030,2	181
240	380211,2	0392,2	0573,0	0753,8	0934,5	1115,1	1295,6	1476,1	1656,5	1836,8	
241	2017,0	2197,2	2377,3	2557,3	2737,3	2917,1	3096,9	3276,7	3456,3	3635,9	180
242	3815,4	3994,8	4174,1	4353,4	4532,6	4711,7	4890,8	5069,8	5248,7	5427,5	179
243	5606,3	5785,0	5963,6	6142,1	6320,6	6499,0	6677,3	6855,5	7033,7	7211,8	178
244	7389,8	7567,8	7745,7	7923,5	8101,2	8278,9	8456,5	8634,0	8811,4	8988,8	
245	9166,1	9343,3	9520,5	9697,5	9874,6	*0051,5	*0228,4	*0405,2	*0581,9	*0758,5	177
246	390935,1	1111,6	1288,0	1464,4	1640,7	1816,9	1993,1	2169,1	2345,2	2521,1	176
247	2697,0	2872,7	3048,5	3224,1	3399,7	3575,2	3750,6	3926,0	4101,3	4276,5	175
248	4451,7	4626,8	4801,8	4976,7	5151,6	5326,4	5501,1	5675,8	5850,4	6024,9	
249	6199,3	6373,7	6548,0	6722,3	6896,4	7070,5	7244,6	7418,5	7592,4	7766,3	174
250	7940,0	8113,7	8287,3	8460,8	8634,3	8807,7	8981,1	9154,5	9327,5	9500,7	173
251	9673,7	9846,7	*0019,6	*0192,5	*0365,3	*0538,0	*0710,6	*0883,2	*1055,7	*1228,2	172
252	401400,5	1572,8	1745,1	1917,3	2089,4	2261,4	2433,3	2605,2	2777,1	2948,8	
253	3120,5	3292,1	3463,7	3635,2	3806,6	3978,0	4149,2	4320,5	4491,6	4662,7	171
254	4833,7	5004,7	5175,5	5346,4	5517,1	5687,8	5858,4	6028,9	6199,4	6369,8	170

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
196	20	39	59	78	98	118	137	157	176	182	18	36	55	73	91	109	127	146	164
195	20	39	59	78	98	117	137	156	176	181	18	36	54	72	91	109	127	145	163
194	19	39	58	78	97	116	136	155	175	180	18	36	54	72	90	108	126	144	162
193	19	39	58	77	97	116	135	154	174	179	18	36	54	72	90	107	125	143	161
192	19	38	58	77	96	115	134	154	173	178	18	36	53	71	89	107	125	142	160
191	19	38	57	76	96	115	134	153	172	177	18	35	53	71	89	106	124	142	159
190	19	38	57	76	95	114	133	152	171	176	18	35	53	70	88	106	123	141	158
189	19	38	57	76	95	113	132	151	170	175	18	35	53	70	88	105	123	140	158
188	19	38	56	75	94	113	132	150	169	174	17	35	52	70	87	104	122	139	157
187	19	37	56	75	94	112	131	150	168	173	17	35	52	69	87	104	121	138	156
186	19	37	56	74	93	112	130	149	167	172	17	34	52	69	86	103	120	138	155
185	19	37	56	74	93	111	130	148	167	171	17	34	51	68	86	103	120	137	154
184	18	37	55	74	92	110	129	147	166	170	17	34	51	68	86	102	119	136	153
183	18	37	55	73	92	110	128	146	165										

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
255	406540,2	6710,5	6880,7	7050,8	7220,9	7390,9	7560,8	7730,7	7900,5	8070,3	170
256	8240,0	8409,6	8579,1	8748,6	8918,0	9087,4	9256,7	9425,9	9595,0	9764,1	169
257	9933,1	*0102,1	*0271,0	*0439,8	*0608,5	*0777,2	*0945,9	*1114,4	*1282,9	*1451,5	
258	411619,7	1788,0	1956,2	2124,4	2292,5	2460,5	2628,5	2796,4	2964,3	3132,1	168
259	3299,8	3467,4	3635,0	3802,5	3970,0	4137,4	4304,7	4471,9	4639,1	4806,3	
260	4973,3	5140,4	5307,3	5474,2	5641,0	5807,7	5974,4	6141,0	6307,6	6474,1	167
261	6640,5	6806,9	6973,2	7139,4	7305,6	7471,7	7637,7	7803,7	7969,6	8135,5	
262	8301,3	8467,0	8632,7	8798,3	8963,8	9129,3	9294,7	9460,1	9625,4	9790,6	166
263	9955,7	*0120,8	*0285,9	*0450,9	*0615,8	*0780,6	*0945,4	*1110,1	*1274,8	*1439,4	165
264	421603,9	1768,4	1932,8	2097,2	2261,5	2425,7	2589,8	2753,9	2918,0	3082,0	
265	3245,9	3409,7	3573,5	3737,2	3900,9	4064,5	4228,1	4391,6	4555,0	4718,3	164
266	4881,6	5044,9	5208,1	5371,2	5534,2	5697,2	5860,1	6023,0	6185,8	6348,6	
267	6511,3	6673,9	6836,5	6999,0	7161,4	7323,8	7486,1	7648,4	7810,6	7972,7	163
268	8134,8	8296,8	8458,8	8620,7	8782,5	8944,3	9106,0	9267,7	9429,3	9590,8	
269	9752,3	9913,7	*0075,1	*0236,4	*0397,6	*0558,8	*0719,9	*0880,9	*1041,9	*1202,9	162
270	431363,8	1524,6	1685,3	1846,0	2006,7	2167,3	2327,8	2488,3	2648,7	2809,0	
271	2969,3	3129,5	3289,7	3449,8	3609,8	3769,8	3929,8	4089,6	4249,5	4409,2	161
272	4568,9	4728,5	4888,1	5047,6	5207,1	5366,5	5525,9	5685,1	5844,4	6003,5	160
273	6162,6	6321,7	6480,7	6639,6	6798,5	6957,3	7116,1	7274,8	7433,4	7592,0	159
274	7750,6	7909,0	8067,5	8225,8	8384,1	8542,5	8700,5	8858,7	9016,7	9174,7	
275	9332,7	9490,6	9648,4	9806,2	9963,9	*0121,6	*0279,2	*0436,8	*0594,3	*0751,7	158
276	440909,1	1066,4	1223,7	1380,9	1538,0	1695,1	1852,2	2009,2	2166,1	2323,0	
277	2479,8	2636,5	2793,2	2949,9	3106,5	3263,0	3419,5	3575,9	3732,2	3888,5	157
278	4044,8	4201,0	4357,1	4513,2	4669,2	4825,2	4981,1	5137,0	5292,8	5448,5	156
279	5604,2	5759,8	5915,4	6070,9	6226,4	6381,8	6537,2	6692,5	6847,7	7002,9	
280	7158,0	7313,1	7468,1	7623,1	7778,0	7932,9	8087,7	8242,4	8397,1	8551,7	
281	8706,3	8860,8	9015,3	9169,7	9324,1	9478,4	9632,7	9786,8	9941,0	*0095,1	155
282	450249,1	0403,1	0557,0	0710,9	0864,7	1018,5	1172,2	1325,8	1479,4	1632,9	
283	1786,4	1939,9	2093,2	2246,6	2399,8	2553,1	2706,2	2859,3	3012,4	3165,4	154
284	3318,3	3471,2	3624,1	3776,9	3929,6	4082,3	4234,9	4387,5	4540,0	4692,4	153
285	4844,9	4997,2	5149,5	5301,8	5454,0	5606,1	5758,2	5910,2	6062,2	6214,2	
286	6366,0	6517,9	6669,6	6821,3	6973,0	7124,6	7276,2	7427,7	7579,1	7730,5	152
287	7881,9	8033,2	8184,4	8335,6	8486,8	8637,8	8788,9	8939,9	9090,8	9241,7	
288	9392,5	9543,3	9694,0	9844,6	9995,3	*0145,8	*0296,3	*0446,8	*0597,2	*0747,5	151
289	460897,8	1048,1	1198,3	1348,4	1498,5	1648,6	1798,6	1948,5	2098,4	2248,2	
290	2398,0	2547,7	2697,4	2847,0	2996,6	3146,1	3295,6	3445,0	3594,4	3743,7	150
291	3893,0	4042,2	4191,4	4340,5	4489,5	4638,6	4787,5	4936,4	5085,3	5234,1	149

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
169	17	34	51	68	85	101	118	135	152	158	16	32	47	63	79	95	111	126	142
168	17	34	50	67	84	101	118	134	151	157	16	31	47	63	79	94	110	126	141
167	17	33	50	67	84	100	117	134	150	156	16	31	47	62	78	94	109	125	140
166	17	33	50	66	83	100	116	133	149	155	16	31	47	62	78	93	109	124	140
165	17	33	50	66	83	99	116	132	149	154	15	31	46	62	77	92	108	123	139
164	16	33	49	66	82	98	115	131	148	153	15	31	46	61	77	92	107	122	138
163	16	33	49	65	82	98	114	130	147	152	15	30	46	61	76	91	106	122	137
162	16	32	49	65	81	97	113	130	146	151	15	30	45	60	76	91	106	121	136
161	16	32	48	64	81	97	113	129	145	150	15	30	45	60	75	90	105	120	135
160	16	32	48	64	80	96	112	128	144	149	15	30	45	60	75	89	104	119	134
159	16	32	48	64	80	95	111	127	143										

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
292	465382,9	5551,6	5680,2	5828,8	5977,4	6125,9	6274,5	6422,7	6571,1	6719,4	148
293	6867,6	7015,8	7164,0	7312,1	7460,1	7608,1	7756,1	7905,9	8051,8	8199,6	
294	8347,3	8495,0	8642,7	8790,3	8937,8	9085,5	9232,7	9380,1	9527,5	9674,8	
295	9822,0	9969,2	*0116,4	*0263,4	*0410,5	*0557,5	*0704,4	*0851,3	*0998,2	*1145,0	147
296	471291,7	1438,4	1585,1	1731,7	1878,2	2024,7	2171,1	2317,5	2463,9	2610,2	
297	2756,4	2902,7	3048,8	3194,9	3341,0	3487,0	3632,9	3778,8	3924,7	4070,5	146
298	4216,3	4362,0	4507,6	4653,3	4798,8	4944,3	5089,8	5235,2	5380,6	5525,9	
299	5671,2	5816,4	5961,6	6106,7	6251,8	6396,8	6541,8	6686,7	6831,6	6976,5	145
300	7121,5	7266,0	7410,7	7555,3	7699,9	7844,5	7989,0	8133,4	8277,8	8422,2	
301	8566,5	8710,8	8855,0	8999,1	9143,2	9287,3	9431,3	9575,3	9719,2	9863,1	
302	480006,9	0150,7	0294,5	0438,1	0581,8	0725,4	0868,9	1012,4	1155,9	1299,5	144
303	1442,6	1585,9	1729,2	1872,4	2015,6	2158,7	2301,8	2444,8	2587,8	2730,7	
304	2875,6	3016,4	3159,2	3302,0	3444,6	3587,3	3729,9	3872,5	4015,0	4157,4	143
305	4299,8	4442,2	4584,5	4726,8	4869,0	5011,2	5153,3	5295,4	5437,5	5579,5	
306	5721,4	5863,5	6005,2	6147,0	6288,8	6430,5	6572,2	6713,8	6855,4	6996,9	
307	7138,4	7279,8	7421,2	7562,6	7703,9	7845,1	7986,3	8127,5	8268,6	8409,7	142
308	8550,7	8691,7	8832,6	8973,5	9114,4	9255,2	9395,9	9536,6	9677,3	9817,9	
309	9958,5	*0099,0	*0239,5	*0379,9	*0520,3	*0660,7	*0801,0	*0941,2	*1081,4	*1221,6	141
310	491361,7	1501,8	1641,8	1781,8	1921,7	2061,6	2201,5	2341,3	2481,0	2620,7	
311	2760,4	2900,0	3039,6	3179,1	3318,6	3458,1	3597,4	3736,8	3876,1	4015,4	140
312	4154,6	4293,8	4432,9	4572,0	4711,0	4850,0	4989,0	5127,9	5266,7	5405,6	
313	5544,3	5683,1	5821,8	5960,4	6099,0	6237,5	6376,1	6514,5	6652,9	6791,3	139
314	6929,6	7067,9	7206,2	7344,4	7482,5	7620,6	7758,7	7896,7	8034,7	8172,7	
315	8310,6	8448,4	8586,2	8724,0	8861,7	8999,4	9157,0	9274,6	9412,1	9549,6	138
316	9687,1	9824,5	9961,9	*0099,2	*0236,5	*0373,7	*0510,9	*0648,1	*0785,2	*0922,2	
317	501059,3	1196,2	1333,2	1470,1	1606,9	1743,7	1880,5	2017,2	2153,9	2290,5	
318	2427,1	2563,7	2700,2	2836,6	2973,1	3109,4	3245,8	3382,1	3518,3	3654,5	137
319	3790,7	3926,8	4062,9	4198,9	4334,9	4470,9	4606,8	4742,6	4878,5	5014,2	
320	5150,0	5285,7	5421,3	5556,9	5692,5	5828,0	5963,5	6099,0	6234,4	6369,7	136
321	6505,0	6640,3	6775,5	6910,7	7045,9	7181,0	7316,0	7451,1	7586,0	7721,0	
322	7855,9	7990,7	8125,5	8260,3	8395,0	8529,7	8664,4	8799,0	8933,5	9068,0	135
323	9202,5	9337,0	9471,4	9605,7	9740,0	9874,3	*0008,5	*0142,7	*0276,8	*0410,9	
324	510545,0	0679,0	0813,0	0946,9	1080,8	1214,7	1348,5	1482,3	1616,0	1749,7	134
325	1883,4	2017,0	2150,5	2284,1	2417,5	2551,0	2684,4	2817,8	2951,1	3084,4	
326	3217,6	3350,8	3484,0	3617,1	3750,2	3883,2	4016,2	4149,1	4282,0	4414,9	
327	4547,8	4680,5	4813,3	4946,0	5078,7	5211,3	5343,9	5476,4	5608,9	5741,4	133
328	5873,8	6006,2	6138,6	6270,9	6403,1	6535,4	6667,6	6799,7	6931,8	7063,9	
329	7195,9	7327,9	7459,8	7591,7	7723,6	7855,4	7987,2	8118,9	8250,7	8382,3	132
330	8513,9	8645,5	8777,1	8908,6	9040,0	9171,5	9302,8	9434,2	9565,5	9696,8	
331	9828,0	9959,2	*0090,3	*0221,4	*0352,5	*0483,5	*0614,5	*0745,5	*0876,4	*1007,3	131

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
148	15	30	44	59	74	89	104	118	133	139	14	28	42	56	70	83	97	111	125
147	15	29	44	59	74	88	103	118	132	138	14	28	41	55	69	83	97	110	124
146	15	29	44	58	73	88	102	117	131	137	14	27	41	55	69	82	96	110	123
145	15	29	44	58	73	87	102	116	131	136	14	27	41	54	68	82	95	109	122
144	14	29	43	58	72	86	101	115	130	135	14	27	41	54	68	81	95	108	122
143	14	29	43	57	72	86	100	114	129	134	13	27	40	54	67	80	94	107	121
142	14	28	43	57	71	85	99	114	128	133	13	27	40	53	67	80	93	106	120
141	14	28	42	56	71	85	99	113	127	132	13	26	40	53	66	79	92	106	119
140	14	28	42	56	70	84	98	112	126	131	13	26	39	52	66	79	92	105	118

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
332	521138,1	1268,9	1399,6	1530,3	1661,0	1791,6	1922,2	2052,8	2183,3	2313,8	131
333	2444,2	2574,6	2705,0	2835,3	2965,6	3095,8	3226,0	3356,2	3486,3	3616,4	
334	3746,5	3876,5	4006,4	4136,4	4266,3	4396,1	4525,9	4655,7	4785,4	4915,1	130
335	5044,8	5174,4	5304,0	5433,6	5563,1	5692,5	5822,0	5951,3	6080,7	6210,0	
336	6339,3	6468,5	6597,7	6726,9	6856,0	6985,1	7114,1	7243,1	7372,1	7501,0	
337	7629,9	7758,8	7887,6	8016,3	8145,1	8273,8	8402,4	8531,1	8659,6	8788,2	129
338	8916,7	9045,2	9173,6	9302,0	9430,4	9558,7	9687,0	9815,2	9943,4	*0071,6	
339	530199,7	0327,8	0455,8	0583,9	0711,8	0839,8	0967,7	1095,5	1223,4	1351,2	
340	1478,9	1606,6	1734,3	1861,9	1989,6	2117,1	2244,6	2372,1	2499,6	2627,0	128
341	2754,4	2881,7	3009,0	3136,3	3263,5	3390,7	3517,9	3645,0	3772,1	3899,1	
342	4026,1	4153,1	4280,0	4406,9	4533,8	4660,6	4787,4	4914,1	5040,8	5167,5	
343	5294,1	5420,7	5547,3	5673,8	5800,3	5926,7	6053,2	6179,5	6305,9	6432,2	127
344	6558,4	6684,7	6810,9	6937,0	7063,1	7189,2	7315,3	7441,3	7567,3	7693,2	
345	7819,1	7945,0	8070,8	8196,6	8322,3	8448,1	8573,7	8699,4	8825,0	8950,6	126
346	9076,1	9201,6	9327,1	9452,5	9577,9	9703,2	9828,6	9953,8	*0079,1	*0204,3	
347	540329,5	0454,6	0579,7	0704,8	0829,8	0954,8	1079,8	1204,7	1329,6	1454,4	
348	1579,2	1704,0	1828,8	1953,5	2078,1	2202,8	2327,4	2451,9	2576,5	2701,0	125
349	2825,4	2949,8	3074,2	3198,6	3322,9	3447,2	3571,4	3695,6	3819,8	3943,9	
350	4068,0	4192,1	4316,1	4440,1	4564,1	4688,0	4811,9	4935,8	5059,6	5183,4	
351	5307,1	5430,8	5554,5	5678,1	5801,8	5925,3	6048,9	6172,4	6295,8	6419,3	124
352	6542,7	6666,0	6789,4	6912,6	7035,9	7159,1	7282,3	7405,5	7528,6	7651,7	
353	7774,7	7897,7	8020,7	8143,6	8266,5	8389,4	8512,3	8635,1	8757,8	8880,6	
354	9003,3	9125,9	9248,6	9371,2	9493,7	9616,2	9738,7	9861,2	9983,6	*0106,0	123
355	550228,4	0350,7	0473,0	0595,2	0717,4	0839,6	0961,8	1083,9	1205,9	1328,0	
356	1450,0	1572,0	1693,9	1815,8	1937,7	2059,5	2181,3	2303,1	2424,8	2546,5	
357	2668,2	2789,9	2911,5	3033,0	3154,5	3276,0	3397,5	3518,9	3640,3	3761,7	122
358	3883,0	4004,3	4125,6	4246,8	4368,0	4489,2	4610,3	4731,4	4852,4	4973,5	
359	5094,4	5215,4	5336,3	5457,2	5578,1	5698,9	5819,7	5940,4	6061,2	6181,8	
360	6302,5	6423,1	6543,7	6664,3	6784,8	6905,3	7025,7	7146,1	7266,5	7386,9	121
361	7507,2	7627,5	7747,7	7868,0	7988,1	8108,3	8228,4	8348,5	8468,6	8588,6	
362	8708,6	8828,5	8948,4	9068,3	9188,2	9308,0	9427,8	9547,6	9667,3	9787,0	
363	9906,6	*0026,2	*0145,8	*0265,4	*0384,9	*0504,4	*0623,9	*0743,3	*0862,7	*0982,1	
364	561101,4	1220,7	1339,9	1459,2	1578,4	1697,5	1816,7	1935,8	2054,8	2173,9	120
365	2292,9	2411,8	2530,8	2649,7	2768,5	2887,4	3006,2	3125,0	3243,7	3362,4	
366	3481,1	3599,7	3718,3	3836,9	3955,5	4074,0	4192,5	4310,9	4429,3	4547,7	
367	4666,1	4784,4	4902,7	5020,9	5139,2	5257,3	5375,5	5493,6	5611,7	5729,8	119
368	5847,8	5965,8	6083,8	6201,7	6319,6	6437,5	6555,3	6673,1	6790,9	6908,7	
369	7026,4	7144,0	7261,7	7379,3	7496,9	7614,4	7732,0	7849,5	7966,9	8084,3	
370	8201,7	8319,1	8436,4	8553,7	8671,0	8788,2	8905,4	9022,6	9139,7	9256,8	118
371	9373,9	9491,0	9608,0	9724,9	9841,9	9958,8	*0075,7	*0192,6	*0309,4	*0426,2	
372	570542,9	0659,7	0776,4	0893,0	1009,7	1126,3	1242,9	1359,4	1475,9	1592,4	
373	1708,8	1825,2	1941,6	2058,0	2174,3	2290,6	2406,9	2523,1	2639,3	2755,5	117
374	2871,6	2987,7	3103,8	3219,8	3335,8	3451,8	3567,8	3683,7	3799,6	3915,4	116

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
130	13	26	39	52	65	78	91	104	117
129	13	26	39	52	65	77	90	103	116
128	13	26	38	51	64	77	90	102	115
127	13	25	38	51	64	76	89	102	114
126	13	25	38	50	63	76	88	101	113
125	13	25	38	50	63	75	88	100	113
124	12	25	37	50	62	74	87	99	112
123	12	25	37	49	62	74	86	98	111

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
122	12	24	37	49	61	73	85	98	110
121	12	24	36	48	61	73	85	97	109
120	12	24	36	48	60	72	84	96	108
119	12	24	36	48	60	71	83	95	107
118	12	24	35	47	59	71	83	94	106
117	12	23	35	47	59	70	82	94	105
116	12	23	35	46	58	70	81	93	104

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
375	574031,5	4147,1	4262,8	4378,6	4494,3	4609,9	4725,6	4841,2	4956,8	5072,3	116
376	5187,8	5303,3	5418,8	5534,2	5649,6	5765,0	5880,3	5995,6	6110,9	6226,1	
377	6341,4	6456,5	6571,7	6686,8	6801,9	6917,0	7032,0	7147,0	7262,0	7376,9	
378	7491,8	7606,7	7721,5	7836,3	7951,1	8065,9	8180,6	8295,3	8410,0	8524,6	115
379	8639,2	8753,8	8868,3	8982,8	9097,3	9211,8	9326,2	9440,6	9555,0	9669,3	
380	9783,6	9897,9	☼0012,1	☼0126,3	☼0240,5	☼0354,7	☼0468,8	☼0582,9	☼0696,9	☼0811,0	
381	580925,0	1038,9	1152,9	1266,8	1380,7	1494,5	1608,4	1722,2	1835,9	1949,7	
382	2063,4	2177,0	2290,7	2404,3	2517,9	2631,4	2745,0	2858,5	2971,9	3085,4	114
383	3198,8	3312,2	3425,3	3538,8	3652,1	3765,4	3878,6	3991,8	4105,0	4218,1	
384	4331,2	4444,3	4557,4	4670,4	4783,4	4896,3	5009,3	5122,2	5235,1	5347,9	
385	5460,7	5573,5	5686,3	5799,0	5911,7	6024,4	6137,0	6249,6	6362,2	6474,8	
386	6587,3	6699,8	6812,3	6924,7	7037,1	7149,5	7261,8	7374,2	7486,5	7598,7	113
387	7711,0	7823,2	7935,3	8047,5	8159,6	8271,7	8383,8	8495,8	8607,8	8719,8	
388	8831,7	8943,6	9055,5	9167,4	9279,2	9391,0	9502,8	9614,5	9726,3	9837,9	
389	9949,6	☼0061,2	☼0172,8	☼0284,4	☼0395,9	☼0507,5	☼0618,9	☼0730,4	☼0841,8	☼0953,2	112
390	591064,6	1176,0	1287,3	1398,6	1509,8	1621,0	1732,2	1843,4	1954,6	2065,7	
391	2176,8	2287,8	2398,8	2509,8	2620,8	2731,8	2842,7	2953,6	3064,4	3175,3	
392	3286,1	3396,8	3507,6	3618,3	3729,0	3839,7	3950,3	4060,9	4171,5	4282,0	
393	4392,6	4503,0	4613,3	4723,9	4834,4	4944,7	5055,1	5165,4	5275,7	5386,0	111
394	5496,2	5606,4	5716,6	5826,8	5936,9	6047,0	6157,1	6267,1	6377,1	6487,1	
395	6597,1	6707,0	6816,9	6926,8	7036,7	7146,5	7256,3	7366,1	7475,8	7585,3	
396	7695,2	7804,8	7914,3	8024,1	8133,6	8243,2	8352,7	8462,2	8571,7	8681,1	
397	8790,3	8899,9	9009,2	9118,6	9227,9	9337,1	9446,4	9555,6	9664,8	9773,9	110
398	9883,1	9992,2	☼0101,3	☼0210,3	☼0319,3	☼0428,3	☼0537,3	☼0646,2	☼0755,1	☼0864,0	
399	600972,9	1081,7	1190,3	1299,3	1408,1	1516,8	1625,3	1734,1	1842,8	1951,4	
400	2060,0	2168,6	2277,1	2385,6	2494,1	2602,3	2710,9	2819,3	2927,7	3036,1	
401	3144,4	3252,7	3360,9	3469,2	3577,4	3685,3	3793,7	3901,8	4009,9	4118,0	109
402	4226,1	4334,1	4442,1	4550,0	4658,0	4765,9	4873,8	4981,6	5089,3	5197,3	
403	5305,0	5412,8	5520,3	5628,2	5735,9	5843,3	5951,2	6058,7	6166,3	6273,9	
404	6381,4	6488,9	6596,3	6703,7	6811,1	6918,3	7025,9	7133,2	7240,3	7347,8	108
405	7455,0	7562,2	7669,4	7776,6	7883,7	7990,9	8097,9	8205,0	8312,0	8419,1	
406	8526,0	8633,0	8739,9	8846,8	8953,7	9060,3	9167,4	9274,2	9380,9	9487,7	
407	9594,4	9701,1	9807,8	9914,4	☼0021,0	☼0127,6	☼0234,2	☼0340,7	☼0447,2	☼0553,7	
408	0660,2	0766,6	0873,0	0979,4	1085,7	1192,1	1298,4	1404,6	1510,9	1617,1	107
409	611723,3	1829,3	1935,6	2041,7	2147,8	2253,9	2359,9	2466,0	2572,0	2677,9	
410	2785,9	2889,8	2995,7	3101,3	3207,4	3313,2	3418,9	3524,7	3630,4	3736,1	
411	3841,8	3947,3	4053,1	4158,7	4264,3	4369,8	4475,4	4580,9	4686,3	4791,8	
412	4897,2	5002,6	5108,0	5213,3	5318,7	5424,0	5529,2	5634,3	5739,7	5844,9	106
413	5950,1	6055,2	6160,3	6265,4	6370,3	6475,3	6580,3	6685,3	6790,3	6895,4	
414	7000,3	7105,2	7210,1	7314,9	7419,7	7524,3	7629,3	7734,0	7838,7	7943,4	
415	8048,1	8152,7	8257,3	8361,9	8466,3	8571,0	8675,3	8780,0	8884,3	8988,9	105
416	9095,3	9197,7	9302,1	9406,4	9510,7	9615,0	9719,3	9823,3	9927,7	☼0031,9	
417	620136,1	0240,2	0344,3	0448,4	0552,4	0656,3	0760,3	0864,3	0968,4	1072,4	
418	1176,3	1280,2	1384,0	1487,9	1591,7	1695,3	1799,2	1903,0	2006,7	2110,4	
419	2214,0	2317,7	2421,3	2524,9	2628,4	2732,0	2835,3	2939,0	3042,4	3145,9	104

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
115	12	23	35	46	58	69	81	92	104	109	11	22	33	44	55	65	76	87	98
114	11	23	34	46	57	68	80	91	103	108	11	22	32	43	54	65	76	86	97
113	11	23	34	45	57	68	79	90	102	107	11	21	32	43	54	64	75	86	96
112	11	22	34	45	56	67	78	90	101	106	11	21	32	42	53	64	74	85	95
111	11	22	33	44	56	67	78	89	100	105	11	21	32	42	53	63	74	84	95
110	11	22	33	44	55	66	77	88	99	104	10	21	31	42	52	62	73	83	94

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
420	623249,5	3352,7	3456,0	3559,4	3662,7	3766,0	3869,3	3972,5	4075,7	4178,9	104
421	4282,1	4385,2	4488,4	4591,5	4694,5	4797,6	4900,6	5003,6	5106,6	5209,5	
422	5312,5	5415,4	5518,2	5621,1	5723,9	5826,7	5929,5	6032,2	6135,0	6237,7	
423	6340,4	6443,0	6545,7	6648,3	6750,9	6853,4	6956,0	7058,5	7161,0	7263,4	103
424	7365,9	7468,3	7570,7	7673,0	7775,4	7877,7	7980,0	8082,3	8184,5	8286,7	
425	8388,9	8491,1	8593,3	8695,4	8797,5	8899,6	9001,6	9103,7	9205,7	9307,6	
426	9409,6	9511,5	9613,4	9715,3	9817,2	9919,0	*0020,9	*0122,6	*0224,4	*0326,2	
427	630427,9	0529,6	0631,2	0732,9	0834,5	0936,1	1037,7	1139,3	1240,8	1342,5	102
428	1445,8	1545,2	1646,7	1748,1	1849,5	1950,8	2052,2	2153,5	2254,9	2356,0	
429	2457,3	2558,5	2659,7	2760,9	2862,0	2963,2	3064,3	3165,4	3266,4	3367,4	
430	3468,5	3569,4	3670,4	3771,3	3872,3	3973,2	4074,0	4174,9	4275,7	4376,5	
431	4477,3	4578,0	4678,8	4779,5	4880,1	4980,8	5081,4	5182,0	5282,6	5383,2	101
432	5483,7	5584,3	5684,8	5785,2	5885,7	5986,1	6086,5	6186,9	6287,3	6387,6	
433	6487,9	6588,2	6688,4	6788,7	6888,9	6989,1	7089,3	7189,4	7289,5	7389,7	
434	7489,7	7589,8	7689,8	7789,8	7889,8	7989,8	8089,7	8189,6	8289,5	8389,4	
435	8489,3	8589,1	8688,9	8788,7	8888,4	8988,2	9087,9	9187,6	9287,2	9386,9	100
436	9486,5	9586,1	9685,7	9785,2	9884,7	9984,2	*0083,7	*0183,2	*0282,6	*0382,0	
437	640481,4	0580,8	0680,2	0779,5	0878,8	0978,1	1077,3	1176,5	1275,8	1374,9	
438	1474,1	1573,3	1672,4	1771,5	1870,5	1969,6	2068,6	2167,6	2266,6	2365,6	
439	2464,5	2563,4	2662,3	2761,2	2860,1	2958,9	3057,7	3156,5	3255,2	3354,0	
440	3452,7	3551,4	3650,0	3748,7	3847,3	3945,9	4044,5	4143,1	4241,6	4340,1	99
441	4438,6	4537,1	4635,5	4733,9	4832,3	4930,7	5029,1	5127,4	5225,7	5324,0	
442	5422,3	5520,5	5618,7	5716,9	5815,1	5913,3	6011,4	6109,5	6207,6	6305,7	
443	6403,7	6501,8	6599,8	6697,7	6795,7	6893,6	6991,5	7089,4	7187,3	7285,1	
444	7383,0	7480,8	7578,6	7676,3	7774,1	7871,8	7969,5	8067,1	8164,8	8262,4	
445	8360,0	8457,6	8555,2	8652,7	8750,2	8847,7	8945,2	9042,6	9140,1	9237,5	
446	9334,9	9432,2	9529,6	9626,9	9724,2	9821,5	9918,7	*0016,0	*0113,2	*0210,4	98
447	650307,5	0404,7	0501,8	0598,9	0696,0	0793,0	0890,1	0987,1	1084,1	1181,1	
448	1278,0	1374,9	1471,9	1568,7	1665,6	1762,4	1859,3	1956,1	2052,8	2149,6	
449	2246,3	2343,1	2439,7	2536,4	2633,1	2729,7	2826,3	2922,9	3019,5	3116,0	
450	3212,5	3309,0	3405,5	3501,9	3598,4	3694,8	3791,2	3887,6	3983,9	4080,2	97
451	4176,5	4272,8	4369,1	4465,3	4561,6	4657,8	4753,9	4850,1	4946,2	5042,3	
452	5138,4	5234,5	5330,6	5426,6	5522,6	5618,6	5714,5	5810,5	5906,4	6002,3	
453	6098,2	6194,1	6289,9	6385,7	6481,5	6577,3	6673,0	6768,8	6864,5	6960,2	
454	7055,9	7151,5	7247,1	7342,7	7438,3	7533,9	7629,4	7725,0	7820,5	7915,9	96
455	8011,4	8106,8	8202,3	8297,7	8393,0	8488,4	8583,7	8679,0	5774,3	8869,6	
456	8964,8	9060,1	9155,3	9250,5	9345,6	9440,8	9535,9	9631,0	9726,1	9821,2	
457	9916,2	*0011,2	*0106,2	*0201,2	*0296,2	*0391,1	*0486,0	*0580,9	*0675,8	*0770,6	
458	660865,5	0960,3	1055,1	1149,9	1244,6	1339,3	1434,1	1528,7	1623,4	1718,1	
459	1812,7	1907,3	2001,9	2096,4	2191,0	2285,5	2380,0	2474,5	2569,0	2663,4	
460	2757,8	2852,2	2946,6	3041,0	3135,3	3229,6	3323,9	3418,2	3512,5	3606,7	95
461	3700,9	3795,1	3889,3	3983,5	4077,6	4171,7	4265,8	4359,9	4453,9	4548,0	
462	4642,0	4736,0	4829,9	4923,9	5017,8	5111,7	5205,6	5299,5	5393,4	5487,2	
463	5581,0	5674,8	5768,6	5862,3	5956,0	6049,7	6143,4	6237,1	6330,7	6424,4	
464	6518,0	6611,6	6705,1	6798,7	6892,2	6985,7	7079,2	7172,7	7266,1	7359,5	94

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
103	10	21	31	41	52	62	72	82	93
102	10	20	31	41	51	61	71	82	92
101	10	20	30	40	51	61	71	81	91
100	10	20	30	40	50	60	70	80	90
99	10	20	30	40	50	59	69	79	89

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
98	10	20	29	39	49	59	69	78	88
97	10	19	29	39	49	58	68	78	87
96	10	19	29	38	48	58	67	77	86
95	10	19	29	38	48	57	67	76	86
94	9	19	28	38	47	56	66	75	85

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
465	667455,0	7546,5	7639,7	7733,1	7826,4	7919,7	8013,0	8106,2	8199,5	8292,7	93
466	8385,9	8479,1	8572,3	8665,4	8758,5	8851,6	8944,7	9037,8	9130,8	9223,9	
467	9316,9	9409,9	9502,8	9595,8	9688,7	9781,6	9874,5	9967,4	*0060,2	*0153,0	
468	670245,9	0338,6	0431,4	0524,2	0616,9	0709,6	0802,3	0895,0	0987,6	1080,2	
469	1172,8	1265,4	1358,0	1450,6	1543,1	1635,6	1728,1	1820,6	1913,0	2005,4	
470	2097,9	2190,3	2282,6	2375,0	2467,3	2559,6	2651,9	2744,2	2836,5	2928,7	
471	3020,9	3113,1	3205,3	3297,4	3389,6	3481,7	3573,8	3665,9	3757,9	3850,0	
472	3942,0	4034,0	4126,0	4217,9	4309,9	4401,8	4493,7	4585,6	4677,5	4769,3	
473	4861,1	4952,9	5044,7	5136,5	5228,3	5320,0	5411,7	5503,4	5595,1	5686,7	
474	5778,3	5870,0	5961,5	6053,1	6144,7	6236,2	6327,7	6419,2	6510,7	6602,2	92
475	6693,6	6785,0	6876,4	6967,8	7059,2	7150,5	7241,8	7333,2	7424,4	7515,7	
476	7607,0	7698,2	7789,4	7880,6	7971,8	8062,9	8154,0	8245,2	8336,2	8427,3	
477	8518,4	8609,4	8700,4	8791,4	8882,4	8973,4	9064,3	9155,2	9246,1	9337,0	
478	9427,9	9518,7	9609,6	9700,4	9791,2	9881,9	9972,7	*0063,4	*0154,1	*0244,8	
479	680335,5	0426,2	0516,8	0607,4	0698,0	0788,6	0879,2	0969,7	1060,2	1150,7	
480	1241,2	1331,7	1422,2	1512,6	1603,0	1693,4	1783,8	1874,1	1964,5	2054,8	91
481	2145,1	2235,4	2325,6	2415,9	2506,1	2596,3	2686,5	2776,6	2866,8	2956,9	
482	3047,0	3137,1	3227,2	3317,3	3407,3	3497,3	3587,3	3677,3	3767,3	3857,2	
483	3947,1	4037,0	4126,9	4216,8	4306,6	4396,5	4486,3	4576,1	4665,9	4755,6	
484	4845,4	4935,1	5024,8	5114,5	5204,1	5293,8	5383,4	5473,0	5562,6	5652,2	
485	5741,7	5831,3	5920,8	6010,3	6099,8	6189,2	6278,7	6368,1	6457,5	6546,9	
486	6636,3	6725,6	6815,0	6904,3	6993,6	7082,8	7172,1	7261,3	7350,6	7439,8	90
487	7529,0	7618,1	7707,3	7796,4	7885,5	7974,6	8063,7	8152,8	8241,8	8330,8	
488	8419,8	8508,8	8597,8	8686,7	8775,7	8864,6	8953,5	9042,3	9131,2	9220,0	
489	9308,9	9397,7	9486,4	9575,2	9664,0	9752,7	9841,4	9930,1	*0018,8	*0107,4	
490	690196,1	0284,7	0373,3	0461,9	0550,5	0639,0	0727,5	0816,1	0904,6	0993,0	
491	1081,5	1169,9	1258,4	1346,8	1435,2	1523,5	1611,9	1700,2	1788,5	1876,8	89
492	1965,1	2053,4	2141,6	2229,8	2318,0	2406,2	2494,4	2582,6	2670,7	2758,8	
493	2846,9	2935,0	3023,1	3111,1	3199,1	3287,2	3375,2	3463,1	3551,1	3639,0	
494	3726,9	3814,9	3902,7	3990,6	4078,5	4166,3	4254,1	4341,9	4429,7	4517,5	
495	4605,2	4692,9	4780,6	4868,3	4956,0	5043,7	5131,3	5218,9	5306,5	5394,1	
496	5481,7	5569,2	5656,8	5744,3	5831,8	5919,3	6006,7	6094,2	6181,6	6269,0	88
497	6356,4	6443,8	6531,1	6618,5	6705,8	6793,1	6880,4	6967,6	7054,9	7142,1	
498	7229,3	7316,5	7403,7	7490,9	7578,0	7665,2	7752,3	7839,4	7926,4	8013,5	
499	8100,5	8187,6	8274,6	8361,6	8448,5	8535,5	8622,4	8709,3	8796,3	8883,1	
500	8970,0	9056,9	9143,7	9230,5	9317,3	9404,1	9490,8	9577,6	9664,3	9751,0	
501	9837,7	9924,4	*0011,1	*0097,7	*0184,3	*0270,9	*0357,5	*0444,1	*0530,7	*0617,2	
502	700703,7	0790,2	0876,7	0963,2	1049,6	1136,1	1222,5	1308,9	1395,3	1481,6	87
503	1568,0	1654,3	1740,6	1826,9	1913,2	1999,5	2085,7	2172,0	2258,2	2344,4	
504	2430,5	2516,7	2602,8	2689,0	2775,1	2861,2	2947,2	3033,3	3119,3	3205,4	
505	3291,4	3377,4	3463,3	3549,3	3635,2	3721,2	3807,1	3893,0	3978,8	4064,7	
506	4150,5	4236,3	4322,1	4407,9	4493,7	4579,4	4665,2	4750,9	4836,6	4922,3	
507	5008,0	5093,6	5179,2	5264,9	5350,5	5436,0	5521,6	5607,2	5692,7	5778,2	
508	5863,7	5949,2	6034,7	6120,1	6205,5	6291,0	6376,4	6461,7	6547,1	6632,5	86
509	6717,8	6803,1	6888,4	6973,7	7058,9	7144,2	7229,4	7314,6	7399,8	7485,0	
510	7570,2	7655,3	7740,5	7825,6	7910,7	7995,7	8080,8	8165,9	8250,9	8335,9	
511	8420,9	8505,9	8590,8	8675,8	8760,7	8845,6	8930,5	9015,4	9100,3	9185,1	85

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
93	9	19	28	37	47	56	65	74	84	89	9	18	27	36	45	53	62	71	80
92	9	18	28	37	46	55	64	74	83	88	9	18	26	35	44	53	62	70	79
91	9	18	27	36	46	55	64	73	82	87	9	17	26	35	44	52	61	70	78
90	9	18	27	36	45	54	63	72	81	86	9	17	26	34	43	52	60	69	77

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
512	709270,0	9354,8	9439,6	9524,4	9609,1	9693,9	9778,6	9863,3	9948,0	*0032,7	
513	710117,4	0202,0	0286,6	0371,3	0455,9	0540,4	0625,0	0709,6	0794,1	0878,6	85
514	0963,1	1047,6	1132,1	1216,5	1301,0	1385,4	1469,8	1554,2	1638,5	1722,9	
515	1807,2	1891,5	1975,9	2060,1	2144,4	2228,7	2312,9	2597,1	2481,3	2565,5	
516	2649,7	2733,9	2818,0	2902,1	2986,2	3070,3	3154,4	3238,5	3322,5	3406,5	
517	3490,5	3574,5	3658,5	3742,5	3826,4	3910,4	3994,3	4078,2	4162,0	4245,9	
518	4329,8	4413,6	4497,4	4581,2	4665,0	4748,8	4832,5	4916,2	5000,0	5085,7	
519	5167,4	5251,0	5334,7	5418,3	5501,9	5585,6	5669,1	5752,7	5836,3	5919,8	
520	6003,3	6086,9	6170,3	6253,8	6337,3	6420,7	6504,2	6587,6	6671,0	6754,4	
521	6837,7	6921,1	7004,4	7087,7	7171,0	7254,3	7337,6	7420,8	7504,1	7587,3	84
522	7670,5	7753,7	7836,9	7920,0	8003,2	8086,3	8169,4	8252,5	8335,6	8418,6	
523	8501,7	8584,7	8667,7	8750,7	8833,7	8916,7	8999,6	9082,6	9165 5	9248,4	
524	9331,3	9414,2	9497,0	9579,9	9662,7	9745,5	9828,3	9911,1	9993,8	*0076,6	
525	720159,3	0242,0	0324,7	0407,4	0490,1	0572,7	0655,4	0738,0	0820,6	0903,2	
526	0985,7	1068,3	1150,8	1233,4	1315,9	1398,4	1480,9	1563,3	1645,8	1728,2	83
527	1810,6	1893,0	1975,4	2057,8	2140,1	2222,5	2304,8	2387,1	2469,4	2551,7	
528	2633,9	2716,2	2798,4	2880,6	2962,8	3045,0	3127,2	3209,3	3291,4	3373,6	
529	3455,7	3537,8	3619,8	3701,9	3783,9	3866,0	3948,0	4030,0	4112,0	4193,9	
530	4275,9	4357,8	4439,7	4521,6	4603,5	4685,4	4767,2	4849,1	4930,9	5012,7	
531	5094,5	5176,3	5258,1	5339,8	5421,6	5503,3	5585,0	5666,7	5748,3	5830,0	
532	5911,6	5993,3	6074,9	6156,5	6238,0	6319,6	6401,2	6482,7	6564,2	6645,7	
533	6727,2	6808,7	6890,1	6971,6	7053,0	7134,4	7215,8	7297,2	7378,6	7459,9	82
534	7541,3	7622,6	7703,9	7785,2	7866,4	7947,7	8029,0	8110,2	8191,4	8272,6	
535	8353,8	8435,0	8516,1	8597,2	8678,4	8759,5	8840,6	8921,6	9002,7	9083,8	
536	9164,8	9245,8	9326,8	9407,8	9488,8	9569,7	9650,7	9731,6	9812,5	9893,4	
537	9974,3	*0055,2	*0136,0	*0216,8	*0297,7	*0378,5	*0459,3	*0540,0	*0620,8	*0701,5	
538	730782,3	0863,0	0943,7	1024,4	1105,1	1185,7	1266,3	1347,0	1427,6	1508,2	81
539	1588,8	1669,3	1749,9	1830,4	1910,9	1991,4	2071,9	2152,4	2232,9	2313,3	
540	2393,8	2474,2	2554,6	2635,0	2715,3	2795,7	2876,0	2956,4	3036,7	3117,0	
541	3197,3	3277,5	3357,8	3438,0	3518,3	3598,5	3678,7	3758,8	3839,0	3919,2	
542	3999,3	4079,4	4159,5	4239,6	4319,7	4399,7	4479,8	4559,8	4639,8	4719,8	
543	4799,8	4879,8	4959,8	5039,7	5119,6	5199,5	5279,4	5359,3	5439,2	5519,1	
544	5598,9	5678,7	5758,5	5838,3	5918,1	5997,9	6077,6	6157,4	6237,1	6316,8	
545	6396,5	6476,2	6555,8	6635,5	6715,1	6794,8	6874,4	6954,0	7033,5	7115,1	80
546	7192,6	7272,2	7351,7	7431,2	7510,7	7590,2	7669,6	7749,1	7828,5	7907,9	
547	7987,3	8066,7	8146,1	8225,4	8304,8	8384,1	8463,4	8542,7	8622,0	8701,3	
548	8780,6	8859,8	8939,0	9018,2	9097,4	9176,6	9255,8	9335,0	9414,1	9493,2	
549	9572,3	9651,4	9730,5	9809,6	9888,7	9967,7	*0046,7	*0125,7	*0204,7	*0283,7	
550	740326,7	0441,6	0520,6	0599,5	0678,4	0757,3	0836,2	0915,1	0993,9	1072,8	
551	1151,6	1230,4	1309,2	1388,0	1466,8	1545,5	1624,3	1703,0	1781,7	1860,4	
552	1939,1	2017,7	2096,4	2175,0	2253,7	2332,3	2410,9	2489,5	2568,0	2646,6	
553	2725,1	2803,7	2882,2	2960,7	3039,2	3117,6	3196,1	3274,5	3353,0	3431,4	79
554	3509,8	3588,2	3666,5	3744,9	3823,2	3901,6	3979,9	4058,2	4136,5	4214,7	
555	4293,0	4371,2	4449,5	4527,7	4605,9	4684,1	4762,2	4840,4	4918,5	4996,7	
556	5074,8	5152,9	5231,0	5309,1	5387,1	5465,2	5543,2	5621,2	5699,2	5777,2	
557	5855,2	5933,2	6011,1	6089,0	6167,0	6244,9	6322,8	6400,6	6478,5	6556,4	
558	6634,2	6712,0	6789,8	6867,6	6945,4	7023,2	7100,9	7178,7	7256,4	7334,1	
559	7411,8	7489,5	7567,2	7644,8	7722,5	7800,1	7877,7	7955,3	8032,9	8110,5	78

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
85	9	17	26	34	43	51	60	68	77	81	8	16	24	32	41	49	57	65	73
84	8	17	25	34	42	50	59	67	76	80	8	16	24	32	40	48	56	64	72
83	8	17	25	33	42	50	58	66	75	79	8	16	24	32	40	47	55	63	71
82	8	16	25	33	41	49	57	66	74	78	8	16	23	31	39	47	55	62	70

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
560	748188,0	8265,6	8343,1	8420,6	8498,1	8575,6	8653,1	8730,6	8808,0	8885,4	78
561	8962,9	9040,3	9117,7	9195,0	9272,4	9349,8	9427,1	9504,4	9581,7	9659,0	
562	9736,3	9813,6	9890,8	9968,1	*0045,5	*0122,5	*0199,7	*0276,9	*0354,1	*0431,2	
563	750508,4	0585,5	0662,6	0739,8	0816,8	0893,9	0971,0	1048,0	1125,1	1202,1	
564	1279,1	1356,1	1433,1	1510,1	1587,0	1663,9	1740,9	1817,8	1894,7	1971,6	
565	2048,4	2125,3	2202,2	2279,0	2355,8	2432,6	2509,4	2586,2	2662,9	2739,7	
566	2816,4	2893,2	2969,9	3046,6	3123,2	3199,9	3276,6	3353,2	3429,8	3506,5	
567	3583,1	3659,6	3736,2	3812,8	3889,3	3965,9	4042,4	4118,9	4195,4	4271,9	
568	4348,3	4424,8	4501,2	4577,7	4654,1	4730,5	4806,9	4883,2	4959,6	5035,9	77
569	5112,3	5188,6	5264,9	5341,2	5417,5	5493,7	5570,0	5646,2	5722,4	5798,7	
570	5874,9	5951,0	6027,2	6103,4	6179,5	6255,6	6331,8	6407,9	6484,0	6560,0	
571	6636,1	6712,2	6788,2	6864,2	6940,2	7016,2	7092,2	7168,2	7244,2	7320,1	
572	7396,0	7471,9	7547,9	7623,7	7699,6	7775,5	7851,3	7927,2	8003,0	8078,8	
573	8154,6	8230,4	8306,2	8381,9	8457,7	8533,4	8609,1	8684,8	8760,5	8836,2	
574	8911,9	8987,5	9063,2	9138,8	9214,4	9290,0	9365,6	9441,2	9516,8	9592,3	
575	9667,8	9743,4	9818,9	9894,4	9969,9	*0045,3	*0120,8	*0196,2	*0271,7	*0347,1	76
576	760422,5	0497,9	0573,3	0648,6	0724,0	0799,3	0874,6	0950,0	1025,3	1100,5	
577	1175,8	1251,1	1326,3	1401,6	1476,8	1552,0	1627,2	1702,4	1777,5	1852,7	
578	1927,8	2003,0	2078,1	2153,2	2228,3	2303,4	2378,4	2453,5	2528,5	2603,5	
579	2678,6	2753,6	2828,6	2903,5	2978,5	3053,4	3128,4	3203,3	3278,2	3353,1	
580	3428,0	3502,9	3577,7	3652,6	3727,4	3802,2	3877,0	3951,8	4026,6	4101,4	
581	4176,1	4250,9	4325,6	4400,3	4475,0	4549,7	4624,4	4699,1	4773,7	4848,4	
582	4923,0	4997,6	5072,2	5146,8	5221,4	5295,9	5370,5	5445,0	5519,5	5594,1	
583	5668,6	5743,0	5817,5	5892,0	5966,4	6040,9	6115,3	6189,7	6264,1	6338,5	75
584	6412,8	6487,2	6561,6	6635,9	6710,2	6784,5	6858,8	6933,1	7007,4	7081,6	
585	7155,9	7230,1	7304,3	7378,5	7452,7	7526,9	7601,1	7675,2	7749,4	7823,5	
586	7897,6	7971,7	8045,8	8119,9	8194,0	8268,0	8342,1	8416,1	8490,1	8564,1	
587	8638,1	8712,1	8786,0	8860,0	8933,9	9007,9	9081,8	9155,7	9229,6	9303,5	
588	9377,3	9451,2	9525,0	9598,8	9672,7	9746,5	9820,3	9894,0	9967,8	*0041,6	
589	770115,3	0189,0	0262,7	0336,4	0410,1	0483,8	0557,5	0631,1	0704,8	0778,4	
590	0852,0	0925,6	0999,2	1072,8	1146,3	1219,9	1293,4	1367,0	1440,5	1514,0	74
591	1587,5	1661,0	1734,4	1807,9	1881,3	1954,7	2028,2	2101,6	2175,0	2248,3	
592	2321,7	2395,1	2468,4	2541,7	2615,0	2688,4	2761,6	2834,9	2908,2	2981,5	
593	3054,7	3127,9	3201,1	3274,3	3347,5	3420,7	3493,9	3567,0	3640,2	3713,3	
594	3786,4	3859,6	3932,6	4005,7	4078,8	4151,9	4224,9	4297,9	4371,0	4444,0	
595	4517,0	4590,0	4662,9	4735,9	4808,8	4881,8	4954,7	5027,6	5100,5	5173,4	
596	5246,3	5319,1	5392,0	5464,8	5537,6	5610,4	5683,2	5756,0	5828,8	5901,6	
597	5974,3	6047,1	6119,8	6192,5	6265,2	6337,9	6410,6	6483,3	6555,9	6628,6	
598	6701,2	6773,8	6846,4	6919,0	6991,6	7064,2	7136,7	7209,3	7281,8	7354,3	73
599	7426,8	7499,3	7571,8	7644,3	7716,7	7789,2	7861,6	7934,0	8006,5	8078,9	
600	8151,3	8223,6	8296,0	8368,3	8440,7	8513,0	8585,3	8657,6	8729,9	8802,2	
601	8874,5	8946,7	9019,0	9091,2	9163,4	9235,6	9307,8	9380,0	9452,2	9524,3	
602	9596,5	9668,6	9740,8	9812,9	9885,0	9957,1	*0029,1	*0101,2	*0173,2	*0245,3	
603	780317,3	0389,3	0461,3	0533,3	0605,3	0677,3	0749,2	0821,2	0893,1	0965,0	
604	1036,9	1108,8	1180,7	1252,6	1324,5	1396,3	1468,1	1540,0	1611,8	1683,6	
605	1755,4	1827,2	1898,9	1970,7	2042,4	2114,1	2185,9	2257,6	2329,3	2401,0	
606	2472,6	2544,3	2615,9	2687,6	2759,2	2830,8	2902,4	2974,0	3045,6	3117,1	72
607	3188,7	3260,2	3331,8	3403,3	3474,8	3546,3	3617,8	3689,2	3760,7	3832,1	
608	3903,6	3975,0	4046,4	4117,8	4189,2	4260,6	4331,9	4403,3	4474,6	4546,0	
609	4617,3	4688,6	4759,9	4831,2	4902,4	4973,7	5045,0	5116,2	5187,4	5258,6	

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
78	8	16	23	31	39	47	55	62	70	74	7	15	22	30	37	44	52	59	67
77	8	15	23	31	39	46	54	62	69	73	7	15	22	29	37	44	51	58	66
76	8	15	23	30	38	46	53	61	68	72	7	14	21	29	36	43	50	58	65
75	8	15	23	30	38	45	53	60	68										

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
610	785329,8	5401,0	5472,2	5543,4	5614,5	5685,7	5756,8	5827,9	5899,0	5970,1	
611	6041,2	6112,3	6183,3	6254,4	6325,4	6396,5	6467,5	6538,5	6609,5	6680,5	
612	6751,4	6822,4	6893,3	6964,3	7035,2	7106,1	7177,0	7247,9	7318,8	7389,6	
613	7460,5	7531,3	7602,1	7673,0	7743,8	7814,6	7885,4	7956,1	8026,9	8097,6	
614	8168,4	8239,1	8309,8	8380,5	8451,2	8521,9	8592,6	8663,2	8733,9	8804,5	
615	8875,1	8945,7	9016,3	9086,9	9157,5	9228,1	9298,6	9369,2	9439,7	9510,2	
616	9580,7	9651,2	9721,7	9792,2	9862,6	9933,1	*0003,5	*0073,9	*0144,4	*0214,8	71
617	790285,2	0355,5	0425,9	0496,3	0566,6	0637,0	0707,3	0777,6	0847,9	0918,2	
618	0988,5	1058,7	1129,0	1199,2	1269,5	1339,7	1409,9	1480,1	1550,3	1620,5	
619	1690,6	1760,8	1830,9	1901,1	1971,2	2041,3	2111,4	2181,5	2251,6	2321,6	
620	2391,7	2461,7	2531,8	2601,8	2671,8	2741,8	2811,8	2881,7	2951,7	3021,7	
621	3091,6	3161,5	3231,4	3301,4	3371,2	3441,1	3511,0	3580,9	3650,7	3720,6	
622	3790,4	3860,2	3930,0	3999,8	4069,6	4139,4	4209,1	4278,9	4348,6	4418,3	
623	4488,0	4557,8	4627,4	4697,1	4766,8	4836,5	4906,1	4975,7	5045,4	5115,0	
624	5184,6	5254,2	5323,8	5393,3	5462,9	5532,4	5602,0	5671,5	5741,0	5810,5	70
625	5880,0	5949,5	6019,0	6088,4	6157,9	6227,3	6296,7	6366,2	6435,6	6505,0	
626	6574,3	6643,7	6713,1	6782,4	6851,7	6921,1	6990,4	7059,7	7129,0	7198,3	
627	7267,5	7336,8	7406,0	7475,3	7544,5	7613,7	7682,9	7752,1	7821,3	7890,5	
628	7959,6	8028,8	8097,9	8167,1	8236,2	8305,3	8374,4	8443,5	8512,5	8581,6	
629	8650,6	8719,7	8788,7	8857,7	8926,7	8995,7	9064,7	9133,7	9202,7	9271,6	
630	9340,5	9409,5	9478,4	9547,3	9616,2	9685,1	9754,0	9822,8	9891,7	9960,5	
631	800029,4	0098,2	0167,0	0235,8	0304,6	0373,4	0442,1	0510,9	0579,6	0648,4	69
632	0717,1	0785,8	0854,5	0923,2	0991,9	1060,5	1129,2	1197,8	1266,5	1335,1	
633	1403,7	1472,3	1540,9	1609,5	1678,1	1746,6	1815,2	1883,7	1952,2	2020,8	
634	2089,3	2157,8	2226,2	2294,7	2363,2	2431,6	2500,1	2568,5	2636,9	2705,3	
635	2773,7	2842,1	2910,5	2978,9	3047,2	3115,6	3183,9	3252,2	3320,5	3388,8	
636	3457,1	3525,4	3593,7	3661,9	3730,2	3798,4	3866,6	3934,8	4003,1	4071,2	
637	4139,4	4207,6	4275,8	4343,9	4412,1	4480,2	4548,3	4616,4	4684,5	4752,6	
638	4820,7	4888,7	4956,8	5024,8	5092,9	5160,9	5228,9	5296,9	5364,9	5432,9	
639	5500,9	5568,8	5636,8	5704,7	5772,6	5840,5	5908,5	5976,4	6044,2	6112,1	
640	6180,0	6247,8	6315,7	6383,5	6451 3	6519,1	6586,9	6654,7	6722,5	6790,3	
641	6858,0	6925,8	6993,5	7061,2	7129,0	7196,7	7264,4	7332,0	7399,7	7467,4	
642	7535,0	7602,7	7670,5	7737,9	7805,5	7873,1	7940,7	8008,3	8075,9	8143,4	
643	8211,0	8278,5	8346,0	8413,6	8481,1	8548,6	8616,0	8683,5	8751,0	8818,4	68
644	8885,9	8953,3	9020,7	9088,1	9155,5	9222,9	9290,3	9357,7	9425,0	9492,4	
645	9559,7	9627,0	9694,4	9761,7	9829,0	9896,2	9963,5	*0030,8	*0098,0	*0165,3	
646	810232,5	0299,7	0367,0	0434,2	0501,3	0568,5	0635,7	0702,9	0770,0	0837,2	
647	0904,3	0971,4	1038,5	1105,6	1172,7	1239,8	1306,8	1373,9	1440,9	1508,0	
648	1575,0	1642,0	1709,0	1776,0	1843,0	1910,0	1976,9	2043,9	2110,8	2177,8	
649	2244,7	2311,6	2378,5	2445,4	2512,3	2579,2	2646,0	2712,9	2779,7	2846,5	
650	2913,4	2980,2	3047,0	3113,8	3180,5	3247,3	3314,1	3380,8	3447,5	3514,3	
651	3581,0	3647,7	3714,4	3781,1	3847,8	3914,4	3981,1	4047,7	4114,4	4181,0	
652	4247,6	4314,2	4380,8	4447,4	4514,0	4580,5	4647,1	4713,6	4780,1	4846,7	
653	4913,2	4979,7	5046,2	5112,7	5179,1	5245,6	5312,0	5378,5	5444,9	5511,3	67
654	5577,7	5644,1	5710,5	5776,9	5843,3	5909,7	5976,0	6042,3	6108,7	6175,0	
655	6241,3	6307,6	6373,9	6440,2	6506,4	6572,7	6638,9	6705,2	6771,4	6837,6	
656	6903,8	6970,0	7036,2	7102,4	7168,6	7234,7	7300,9	7367,0	7433,1	7499,3	
657	7565,4	7631,5	7697,6	7763,6	7829,7	7895,8	7961,8	8027,8	8093,9	8159,9	
658	8225,9	8291,9	8357,9	8423,9	8489,8	8555,8	8621,7	8687,7	8753,6	8819,5	
659	8885,4	8951,3	9017,2	9083,1	9148,9	9214,8	9280,6	9346,5	9412,3	9478,1	66

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	7	14	21	28	36	43	50	57	64	68	7	14	20	27	34	41	48	54	61
70	7	14	21	28	35	42	49	56	63	67	7	13	20	27	34	40	47	54	60
69	7	14	21	28	35	41	48	55	62	66	7	13	20	26	33	40	46	53	59

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
660	819545,9	9609,7	9675,5	9741,3	9807,1	9872,8	9938,6	*0004,3	*0070,0	*0135,8	66
661	820201,5	0267,2	0332,8	0398,5	0464,2	0529,8	0595,5	0661,1	0726,8	0792,4	
662	0858,0	0925,6	0989,2	1054,8	1120,3	1185,9	1251,4	1317,0	1382,5	1448,0	
663	1513,5	1579,0	1644,5	1710,0	1775,5	1840,9	1906,4	1971,8	2037,2	2102,7	
664	2168,1	2233,5	2298,9	2364,3	2429,6	2495,0	2560,3	2625,7	2691,0	2756,3	
665	2821,6	2886,9	2952,2	3017,5	3082,8	3148,1	3213,3	3278,6	3343,8	3409,0	
666	3474,2	3539,4	3604,6	3669,8	3735,0	3800,2	3865,3	3930,5	3995,6	4060,7	
667	4125,8	4190,9	4256,0	4321,1	4386,2	4451,3	4516,3	4581,4	4646,4	4711,4	
668	4776,5	4841,5	4906,5	4971,5	5036,4	5101,4	5166,4	5231,3	5296,3	5361,2	
669	5426,1	5491,0	5555,9	5620,8	5685,7	5750,6	5815,4	5880,3	5945,1	6010,0	
670	6074,8	6139,6	6204,4	6269,2	6334,0	6398,8	6463,5	6528,3	6593,1	6657,8	
671	6722,5	6787,2	6851,9	6916,6	6981,3	7046,0	7110,7	7175,3	7240,0	7304,6	
672	7369,3	7433,9	7498,5	7563,1	7627,7	7692,3	7756,9	7821,4	7886,0	7950,5	
673	8015,1	8079,6	8144,1	8208,6	8273,1	8337,6	8402,1	8466,5	8531,0	8595,5	65
674	8659,9	8724,3	8788,7	8853,2	8917,6	8982,0	9046,3	9110,7	9175,1	9239,4	
675	9303,8	9368,1	9432,4	9496,7	9561,1	9625,4	9689,6	9753,9	9818,2	9882,4	
676	9946,7	*0010,9	*0075,2	*0139,4	*0203,6	*0267,8	*0332,0	*0396,2	*0460,4	*0524,5	
677	830588,7	0652,8	0716,9	0781,1	0845,2	0909,3	0973,4	1037,5	1101,6	1165,6	
678	1229,7	1293,7	1357,8	1421,8	1485,8	1549,9	1613,9	1677,8	1741,8	1805,8	
679	1869,8	1933,7	1997,7	2061,6	2125,5	2189,5	2253,4	2317,3	2381,2	2445,0	
680	2508,9	2572,8	2636,6	2700,5	2764,3	2828,1	2891,9	2955,8	3019,5	3083,3	
681	3147,1	3210,9	3274,6	3338,4	3402,1	3465,9	3529,6	3593,3	3657,0	3720,7	
682	3784,4	3848,0	3911,7	3975,4	4039,0	4102,7	4166,3	4229,9	4293,5	4357,1	
683	4420,7	4484,3	4547,9	4611,4	4675,0	4738,5	4802,1	4865,6	4929,1	4992,6	
684	5056,1	5119,6	5183,1	5246,5	5310,0	5373,5	5436,9	5500,3	5563,8	5627,2	
685	5690,6	5754,0	5817,4	5880,7	5944,1	6007,5	6070,8	6134,1	6197,5	6260,8	
686	6324,1	6387,4	6450,7	6514,0	6577,3	6640,5	6703,8	6767,0	6830,3	6893,5	64
687	6956,7	7019,9	7083,2	7146,3	7209,5	7272,7	7335,9	7399,0	7462,2	7525,3	
688	7588,4	7651,6	7714,7	7777,8	7840,9	7903,9	7967,0	8030,1	8093,1	8156,2	
689	8219,2	8282,2	8345,3	8408,3	8471,3	8534,3	8597,3	8660,2	8723,2	8786,1	
690	8849,1	8912,0	8975,0	9037,9	9100,8	9163,7	9226,6	9289,5	9352,3	9415,2	
691	9478,0	9540,9	9603,7	9666,6	9729,4	9792,2	9855,0	9917,8	9980,6	*0043,3	
692	840106,1	0168,8	0231,6	0294,3	0357,1	0419,8	0482,5	0545,2	0607,9	0670,6	
693	0733,2	0795,9	0858,6	0921,2	0983,8	1046,5	1109,1	1171,7	1234,3	1296,9	
694	1359,5	1422,0	1484,6	1547,2	1609,7	1672,3	1734,8	1797,3	1859,8	1922,3	
695	1984,8	2047,3	2109,8	2172,2	2234,7	2297,1	2359,6	2422,0	2484,4	2546,8	
696	2609,2	2671,6	2734,0	2796,4	2858,8	2921,1	2983,5	3045,8	3108,1	3170,5	63
697	3232,8	3295,1	3357,4	3419,7	3481,9	3544,2	3606,5	3668,7	3731,0	3793,2	
698	3855,4	3917,6	3979,8	4042,0	4104,2	4166,4	4228,6	4290,7	4352,9	4415,0	
699	4477,2	4539,3	4601,4	4663,5	4725,6	4787,7	4849,8	4911,9	4973,9	5036,0	
700	5098,0	5160,1	5222,1	5284,1	5346,1	5408,1	5470,1	5532,1	5594,1	5656,1	
701	5718,0	5780,0	5841,9	5903,8	5965,8	6027,7	6089,6	6151,5	6213,4	6275,2	
702	6337,1	6399,0	6460,8	6522,7	6584,5	6646,3	6708,1	6770,0	6831,8	6893,5	
703	6955,3	7017,1	7078,9	7140,6	7202,4	7264,1	7325,8	7387,6	7449,3	7511,0	
704	7572,7	7634,3	7696,0	7757,7	7819,3	7881,0	7942,6	8004,3	8065,9	8127,5	
705	8189,1	8250,7	8312,3	8373,9	8435,5	8497,0	8558,6	8620,1	8681,7	8743,2	
706	8804,7	8866,2	8927,7	8989,2	9050,7	9112,2	9173,6	9235,1	9296,5	9358,0	
707	9419,4	9480,8	9542,3	9603,7	9665,1	9726,4	9787,8	9849,2	9910,6	9971,9	62
708	850033,3	0094,6	0155,9	0217,2	0278,6	0339,9	0401,1	0462,4	0523,7	0585,0	
709	0646,2	0707,5	0768,7	0830,0	0891,2	0952,4	1013,6	1074,8	1136,0	1197,2	

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
66	7	13	20	26	33	40	46	53	59	63	6	13	19	25	32	38	44	50	57
65	7	13	20	26	33	39	46	52	59	62	6	12	19	25	31	37	43	50	56
64	6	13	19	26	32	38	45	51	58										

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
710	851258,3	1319,5	1380,7	1441,8	1503,0	1564,1	1625,2	1686,3	1747,4	1808,5	
711	1869,6	1930,7	1991,7	2052,8	2113,9	2174,9	2235,9	2297,0	2358,0	2419,0	
712	2480,0	2541,0	2602,0	2662,9	2723,9	2784,9	2845,8	2906,8	2967,7	3028,6	
713	3089,5	3150,4	3211,3	3272,2	3333,1	3394,0	3454,8	3515,7	3576,5	3637,4	
714	3698,2	3759,0	3819,8	3880,7	3941,4	4002,2	4063,0	4123,8	4184,5	4245,3	
715	4306,0	4366,8	4427,5	4488,2	4548,9	4609,6	4670,3	4731,0	4791,7	4852,4	
716	4913,0	4973,7	5034,3	5095,0	5155,6	5216,2	5276,8	5337,4	5398,0	5458,6	
717	5519,2	5579,7	5640,3	5700,8	5761,4	5821,9	5882,4	5942,9	6003,5	6064,0	61
718	6124,4	6184,9	6245,4	6305,9	6366,3	6426,8	6487,2	6547,6	6608,1	6668,5	
719	6728,9	6789,3	6849,7	6910,1	6970,4	7030,8	7091,2	7151,5	7211,8	7272,2	
720	7332,5	7392,8	7453,1	7513,4	7573,7	7634,0	7694,3	7754,5	7814,8	7875,0	
721	7935,3	7995,5	8055,7	8115,9	8176,1	8236,3	8296,5	8356,7	8416,9	8477,0	
722	8537,2	8597,3	8657,5	8717,6	8777,7	8837,9	8898,0	8958,1	9018,1	9078,2	
723	9138,3	9198,4	9258,4	9318,5	9378,5	9438,5	9498,6	9558,6	9618,6	9678,6	
724	9738,6	9798,5	9858,5	9918,5	9978,4	*0038,4	*0098,3	*0158,3	*0218,2	*0278,1	
725	860338,0	0397,9	0457,8	0517,7	0577,6	0637,4	0697,3	0757,1	*0817,0	0876,8	
726	0936,6	0996,4	1056,2	1116,0	1175,8	1235,6	1295,4	1355,2	1414,9	1474,7	
727	1534,4	1594,1	1653,9	1713,6	1773,3	1833,0	1892,7	1952,4	2012,1	2071,7	
728	2131,4	2191,0	2250,7	2310,3	2369,9	2429,6	2489,2	2548,8	2608,4	2668,0	
729	2727,5	2787,1	2846,7	2906,2	2965,8	3025,3	3084,8	3144,3	3203,9	3263,4	
730	3322,9	3382,3	3441,8	3501,3	3560,8	3620,2	3679,7	3739,1	3798,5	3858,0	
731	3917,4	3976,8	4036,2	4095,6	4155,0	4214,3	4273,7	4333,1	4392,4	4451,7	
732	4511,1	4570,4	4629,7	4689,0	4748,3	4807,6	4866,9	4926,2	4985,5	5044,7	
733	5104,0	5163,2	5222,5	5281,7	5340,9	5400,1	5459,3	5518,5	5577,7	5636,9	60
734	5696,1	5755,2	5814,4	5873,5	5932,7	5991,8	6050,9	6110,0	6169,1	6228,2	
735	6287,3	6346,4	6405,5	6464,6	6523,6	6582,7	6641,7	6700,8	6759,8	6818,8	
736	6877,8	6936,8	6995,8	7054,8	7113,8	7172,8	7231,7	7290,7	7349,6	7408,6	
737	7467,5	7526,4	7585,3	7644,2	7703,1	7762,0	7820,9	7879,8	7938,7	7997,5	
738	8056,4	8115,2	8174,0	8232,9	8291,7	8350,5	8409,3	8468,1	8526,9	8585,7	
739	8644,4	8703,2	8762,0	8820,7	8879,4	8938,2	8996,9	9055,6	9114,3	9173,0	
740	9231,7	9290,4	9349,1	9407,7	9466,4	9525,1	9583,7	9642,3	9701,0	9759,6	
741	9818,2	9876,8	9935,4	9994,0	*0052,6	*0111,2	*0169,7	*0228,3	*0286,8	*0345,4	
742	870403,9	0462,4	0521,0	0579,5	0638,0	0696,5	0754,9	0813,4	0871,9	0930,4	
743	0988,8	1047,3	1105,7	1164,1	1222,6	1281,0	1339,4	1397,8	1456,2	1514,6	59
744	1572,9	1631,3	1689,7	1748,0	1806,4	1864,7	1923,0	1981,4	2039,7	2098,0	
745	2156,5	2214,6	2272,8	2331,1	2389,4	2447,6	2505,9	2564,1	2622,4	2680,6	
746	2738,8	2797,0	2855,2	2913,4	2971,6	3029,8	3088,0	3146,2	3204,3	3262,5	
747	3320,6	3378,7	3436,9	3495,0	3553,1	3611,2	3669,3	3727,4	3785,5	3843,5	
748	3901,6	3959,7	4017,7	4075,7	4133,8	4191,8	4249,8	4307,8	4365,8	4423,8	
749	4481,8	4539,8	4597,8	4655,7	4713,7	4771,6	4829,6	4887,5	4945,4	5003,4	
750	5061,3	5119,2	5177,1	5234,9	5292,8	5350,7	5408,6	5466,4	5524,3	5582,1	
751	5639,9	5697,8	5755,6	5813,4	5871,2	5929,0	5986,8	6044,6	6102,3	6160,1	
752	6217,8	6275,6	6333,3	6391,1	6448,8	6506,5	6564,2	6621,9	6679,6	6737,3	
753	6795,0	6852,6	6910,3	6968,0	7025,6	7083,3	7140,9	7198,5	7256,1	7313,7	
754	7371,3	7428,9	7486,5	7544,1	7601,7	7659,2	7716,8	7774,3	7831,9	7889,4	58
755	7947,0	8004,5	8062,0	8119,5	8177,0	8234,5	8291,9	8349,4	8406,9	8464,3	
756	8521,8	8579,2	8636,7	8694,1	8751,5	8808,9	8866,3	8923,7	8981,1	9038,5	
757	9095,9	9153,2	9210,6	9268,0	9325,3	9382,6	9440,0	9497,3	9554,6	9611,9	
758	9669,2	9726,5	9783,8	9841,1	9898,3	9955,6	*0012,8	*0070,1	*0127,3	*0184,6	
759	880241,8	0299,0	0356,2	0413,4	0470,6	0527,8	0585,0	0642,1	0699,3	0756,4	

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
61	6	12	18	24	31	37	43	49	55	59	6	12	18	24	30	35	41	47	53
60	6	12	18	24	30	36	42	48	54	58	6	12	17	23	29	35	41	46	52

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
760	880815,6	0870,7	0927,9	0985,0	1042,1	1099,2	1156,3	1213,4	1270,5	1327,6	
761	1384,7	1441,7	1498,8	1555,8	1612,9	1669,9	1726,9	1784,0	1841,0	1898,0	
762	1955,0	2012,0	2068,9	2125,9	2182,9	2239,8	2296,8	2353,7	2410,7	2467,6	
763	2524,5	2581,5	2638,4	2695,3	2752,2	2809,0	2865,9	2922,8	2979,7	3036,5	
764	3093,4	3150,2	3207,0	3263,9	3320,7	3377,5	3434,3	3491,1	3547,9	3604,7	
765	3661,4	3718,2	3775,0	3831,7	3888,5	3945,2	4001,9	4058,6	4115,4	4172,1	
766	4228,8	4285,5	4342,1	4398,8	4455,5	4512,2	4568,8	4625,5	4682,1	4738,7	
767	4795,4	4852,0	4908,6	4965,2	5021,8	5078,4	5135,0	5191,5	5248,1	5304,7	
768	5361,2	5417,8	5474,3	5530,8	5587,4	5643,9	5700,4	5756,9	5813,4	5869,9	
769	5926,3	5982,8	6039,3	6095,7	6152,2	6208,6	6265,1	6321,5	6377,9	6434,5	57
770	6490,7	6547,1	6603,5	6659,9	6716,3	6772,6	6829,0	6885,4	6941,7	6998,0	
771	7054,4	7110,7	7167,0	7223,3	7279,6	7335,9	7392,2	7448,5	7504,8	7561,0	
772	7617,3	7673,6	7729,8	7786,0	7842,3	7898,5	7954,7	8010,9	8067,1	8123,3	
773	8179,5	8235,7	8291,8	8348,0	8404,2	8460,3	8516,5	8572,6	8628,7	8684,8	
774	8741,0	8797,1	8853,2	8909,3	8965,3	9021,4	9077,5	9133,6	9189,6	9245,7	
775	9301,7	9357,7	9413,8	9469,8	9525,8	9581,8	9637,8	9693,8	9749,8	9805,8	
776	9861,7	9917,7	9973,6	☼0029,6	☼0085,5	☼0141,5	☼0197,4	☼0253,3	☼0309,2	☼0365,1	
777	890421,0	0476,9	0532,8	0588,7	0644,5	0700,4	0756,3	0812,1	0867,9	0923,8	
778	0979,6	1035,4	1091,2	1147,0	1202,8	1258,6	1314,4	1370,2	1425,9	1481,7	
779	1537,5	1593,2	1648,9	1704,7	1760,4	1816,1	1871,8	1927,5	1983,2	2038,9	
780	2094,6	2150,3	2205,9	2261,6	2317,3	2372,9	2428,5	2484,2	2539,8	2595,4	
781	2651,0	2706,6	2762,2	2817,8	2873,4	2929,0	2984,6	3040,1	3095,7	3151,2	
782	3206,8	3262,3	3317,8	3373,3	3428,8	3484,3	3539,8	3595,3	3650,8	3706,3	
783	3761,8	3817,2	3872,7	3928,1	3983,6	4039,0	4094,4	4149,8	4205,3	4260,7	56
784	4316,1	4371,5	4426,8	4482,2	4537,6	4592,9	4648,3	4703,7	4759,0	4814,3	
785	4869,7	4925,0	4980,3	5035,6	5090,9	5146,2	5201,5	5256,8	5312,0	5367,3	
786	5422,5	5477,8	5533,0	5588,3	5643,5	5698,7	5753,9	5809,2	5864,4	5919,5	
787	5974,7	6029,9	6085,1	6140,3	6195,4	6250,6	6305,7	6360,8	6416,0	6471,1	
788	6526,2	6581,3	6636,4	6691,5	6746,6	6801,7	6856,8	6911,8	6966,9	7022,0	
789	7077,0	7132,0	7187,1	7242,1	7297,1	7352,1	7407,1	7462,1	7517,1	7572,1	
790	7627,1	7682,1	7737,0	7792,0	7846,9	7901,9	7956,8	8011,7	8066,7	8121,6	
791	8176,5	8231,4	8286,3	8341,2	8396,0	8450,9	8505,8	8560,6	8615,5	8670,3	
792	8725,2	8780,0	8834,8	8889,7	8944,5	8999,3	9054,1	9108,9	9163,6	9218,4	
793	9273,2	9327,9	9382,7	9437,5	9492,2	9546,9	9601,7	9656,4	9711,1	9765,8	
794	9820,5	9875,2	9929,9	9984,6	☼0039,2	☼0093,9	☼0148,6	☼0203,2	☼0257,9	☼0312,5	
795	900367,1	0421,8	0476,4	0531,0	0585,6	0640,2	0694,8	0749,4	0803,9	0858,5	
796	0913,1	0967,6	1022,2	1076,7	1131,3	1185,8	1240,3	1294,8	1349,3	1403,8	
797	1458,3	1512,8	1567,3	1621,8	1676,2	1730,7	1785,1	1839,6	1894,0	1948,5	
798	2002,9	2057,3	2111,7	2166,1	2220,5	2274,9	2329,3	2383,7	2438,1	2492,4	55
799	2546,8	2601,1	2655,5	2709,8	2764,1	2818,5	2872,8	2927,1	2981,4	3035,7	
800	3090,0	3144,3	3198,5	3252,8	3307,1	3361,3	3415,6	3469,8	3524,1	3578,3	
801	3632,5	3686,7	3740,9	3795,1	3849,3	3903,5	3957,7	4011,9	4066,1	4120,2	
802	4174,4	4228,5	4282,7	4336,8	4390,9	4445,0	4499,2	4553,3	4607,4	4661,5	
803	4715,5	4769,6	4823,7	4877,8	4931,8	4985,9	5039,9	5094,0	5148,0	5202,0	
804	5256,0	5310,1	5364,1	5418,1	5472,1	5526,0	5580,0	5634,0	5688,0	5741,9	
805	5795,9	5849,8	5903,8	5957,7	6011,6	6065,5	6119,5	6173,4	6227,3	6281,2	
806	6335,0	6388,9	6442,8	6496,7	6550,5	6604,4	6658,2	6712,1	6765,9	6819,7	
807	6873,5	6927,3	6981,2	7035,0	7088,7	7142,5	7196,3	7250,1	7303,8	7357,6	
808	7411,4	7465,1	7518,8	7572,6	7626,3	7680,0	7733,7	7787,4	7841,1	7894,8	
809	7948,5	8002,2	8055,9	8109,5	8163,2	8216,9	8270,5	8324,1	8377,8	8431,4	54

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
57	6	11	17	23	29	34	40	46	51	55	6	11	17	22	28	33	39	44	50
56	6	11	17	22	28	34	39	45	50	54	5	11	16	22	27	32	38	43	49

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
810	908485,0	8558,6	8592,2	8645,8	8699,4	8753,0	8806,6	8860,2	8913,7	8967,3	54
811	9020,9	9074,4	9127,9	9181,5	9235,0	9288,5	9342,0	9395,5	9449,0	9502,5	
812	9556,0	9609,5	9663,0	9716,5	9769,9	9823,4	9876,8	9930,3	9983,7	*0037,1	
813	910090,5	0144,0	0197,4	0250,8	0304,2	0357,6	0410,9	0464,3	0517,7	0571,0	
814	0624,4	0677,8	0731,1	0784,4	0837,8	0891,1	0944,4	0997,7	1051,0	1104,3	
815	1157,6	1210,9	1264,2	1317,4	1370,7	1424,0	1477,2	1530,5	1583,7	1636,9	
816	1690,2	1743,4	1796,6	1849,8	1903,0	1956,2	2009,4	2062,6	2115,7	2168,9	
817	2222,1	2275,2	2328,4	2381,5	2434,6	2487,8	2540,9	2594,0	2647,1	2700,2	
818	2753,3	2806,4	2859,5	2912,6	2965,6	3018,7	3071,7	3124,8	3177,8	3230,9	
819	3283,9	3336,9	3389,9	3443,0	3496,0	3549,0	3601,9	3654,9	3707,9	3760,9	
820	3813,9	3866,8	3919,8	3972,7	4025,7	4078,6	4131,5	4184,4	4237,3	4290,3	
821	4343,2	4396,1	4448,9	4501,8	4554,7	4607,6	4660,4	4713,3	4766,1	4819,0	
822	4871,8	4924,6	4977,5	5030,3	5083,1	5135,9	5188,7	5241,5	5294,3	5347,1	
823	5399,8	5452,6	5505,4	5558,1	5610,9	5663,6	5716,3	5769,1	5821,8	5874,5	
824	5927,2	5979,9	6032,6	6085,3	6138,0	6190,7	6243,3	6296,0	6348,7	6401,3	
825	6453,9	6506,6	6559,2	6611,8	6664,5	6717,1	6769,7	6822,3	6874,9	6927,5	
826	6980,0	7032,6	7085,2	7137,8	7190,3	7242,9	7295,4	7347,9	7400,5	7453,0	
827	7505,5	7558,0	7610,5	7663,0	7715,5	7768,0	7820,5	7873,0	7925,4	7977,9	
828	8030,3	8082,8	8135,2	8187,7	8240,1	8292,5	8344,9	8397,3	8449,7	8502,1	
829	8554,5	8606,9	8659,3	8711,7	8764,0	8816,4	8868,7	8921,1	8973,4	9025,8	53
830	9078,1	9130,4	9182,7	9235,0	9287,3	9339,6	9391,9	9444,2	9496,5	9548,8	
831	9601,0	9653,3	9705,5	9757,8	9810,0	9862,3	9914,5	9966,7	*0018,9	*0071,1	
832	920123,3	0175,5	0227,7	0279,9	0332,1	0384,2	0436,4	0488,6	0540,7	0592,9	
833	0645,0	0697,1	0749,3	0801,4	0853,5	0905,6	0957,7	1009,8	1061,9	1114,0	
834	1166,1	1218,1	1270,2	1322,2	1374,3	1426,3	1478,4	1530,4	1582,4	1634,5	
835	1686,5	1738,5	1790,5	1842,5	1894,5	1946,5	1998,4	2050,4	2102,4	2154,3	
836	2206,3	2258,2	2310,2	2362,1	2414,0	2465,9	2517,9	2569,8	2621,7	2673,6	
837	2725,5	2777,3	2829,2	2881,1	2933,0	2984,8	3036,7	3088,5	3140,4	3192,2	
838	3244,0	3295,8	3347,7	3399,5	3451,3	3503,1	3554,9	3606,6	3658,4	3710,2	
839	3762,0	3813,7	3865,5	3917,2	3969,0	4020,7	4072,4	4124,2	4175,9	4227,6	
840	4279,3	4331,0	4382,7	4434,4	4486,0	4537,7	4589,4	4641,0	4692,7	4744,4	
841	4796,0	4847,6	4899,3	4950,9	5002,5	5054,1	5105,7	5157,3	5208,9	5260,5	
842	5312,1	5363,7	5415,2	5466,8	5518,4	5569,9	5621,5	5673,0	5724,5	5776,1	
843	5827,6	5879,1	5930,6	5982,1	6033,6	6085,1	6136,6	6188,0	6239,5	6291,0	
844	6342,4	6393,9	6445,3	6496,8	6548,2	6599,7	6651,1	6702,5	6753,9	6805,3	52
845	6856,7	6908,1	6959,5	7010,9	7062,2	7113,6	7165,0	7216,3	7267,7	7319,0	
846	7370,4	7421,7	7473,0	7524,3	7575,7	7627,0	7678,3	7729,6	7780,8	7832,1	
847	7883,4	7934,7	7985,9	8037,2	8088,5	8139,7	8190,9	8242,2	8293,4	8344,6	
848	8395,9	8447,1	8498,3	8549,5	8600,7	8651,8	8703,0	8754,2	8805,4	8856,5	
849	8907,7	8958,8	9010,0	9061,1	9112,3	9163,4	9214,5	9265,6	9316,7	9367,8	
850	9418,9	9470,0	9521,1	9572,2	9623,3	9674,3	9725,4	9776,4	9827,5	9878,5	
851	9929,6	9980,6	*0031,6	*0082,6	*0133,6	*0184,7	*0235,7	*0286,6	*0337,6	*0388,6	
852	930439,6	0490,6	0541,5	0592,5	0643,4	0694,4	0745,3	0796,3	0847,2	0898,1	
853	0949,0	0999,9	1050,8	1101,7	1152,6	1203,5	1254,4	1305,3	1356,2	1407,0	
854	1457,9	1508,7	1559,6	1610,4	1661,2	1712,1	1762,9	1813,7	1864,5	1915,3	
855	1966,1	2016,9	2067,7	2118,5	2169,2	2220,0	2270,8	2321,5	2372,3	2423,0	
856	2473,8	2524,5	2575,2	2625,9	2676,7	2727,4	2778,1	2828,8	2879,5	2930,1	
857	2980,8	3031,5	3082,2	3132,8	3183,5	3234,1	3284,8	3335,4	3386,0	3436,7	
858	3487,3	3537,9	3588,5	3639,1	3689,7	3740,3	3790,9	3841,5	3892,0	3942,6	
859	3993,2	4043,7	4094,3	4144,8	4195,3	4245,9	4296,4	4346,9	4397,4	4447,9	

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
54	5	11	16	22	27	32	38	43	49	52	5	10	16	21	26	31	36	42	47
53	5	11	16	21	27	32	37	42	48										

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
860	934498,5	4548,9	4599,4	4649,9	4700,4	4750,9	4801,3	4851,8	4902,3	4952,7	
861	5003,2	5053,6	5104,0	5154,4	5204,9	5255,3	5305,7	5356,1	5406,5	5456,9	
862	5507,5	5557,6	5608,0	5658,4	5708,7	5759,1	5809,5	5859,8	5910,1	5960,5	
863	6010,8	6061,1	6111,4	6161,7	6212,0	6262,3	6512,6	6362,9	6413,2	6463,5	51
864	6513,7	6564,0	6614,3	6664,5	6714,8	6765,0	6815,2	6865,5	6915,7	6965,9	
865	7016,1	7066,3	7116,5	7166,7	7216,9	7267,1	7317,2	7367,4	7417,6	7467,7	
866	7517,9	7568,0	7618,2	7668,3	7718,4	7768,6	7818,7	7868,8	7918,9	7969,0	
867	8019,1	8069,2	8119,3	8169,3	8219,4	8269,5	8319,5	8369,6	8419,6	8469,7	
868	8519,7	8569,8	8619,8	8669,8	8719,8	8769,8	8819,8	8869,8	8919,8	8969,8	
869	9019,8	9069,7	9119,7	9169,7	9219,6	9269,6	9319,5	9569,5	9419,4	9469,3	
870	9519,3	9569,2	9619,1	9669,0	9718,9	9768,8	9818,7	9868,5	9918,4	9968,3	
871	940018,2	0068,0	0117,9	0167,7	0217,6	0267,4	0317,2	0567,0	0416,9	0466,7	
872	0516,5	0566,3	0616,1	0665,9	0715,7	0765,4	0815,2	0865,0	0914,7	0964,5	
873	1014,2	1064,0	1113,7	1163,5	1213,2	1262,9	1312,6	1362,3	1412,0	1461,7	
874	1511,4	1561,1	1610,8	1660,5	1710,1	1759,8	1809,5	1859,1	1908,8	1958,4	
875	2008,1	2057,7	2107,3	2156,9	2206,5	2256,2	2305,8	2355,3	2404,9	2454,5	
876	2504,1	2553,7	2603,2	2652,8	2702,4	2751,9	2801,5	2851,0	2900,5	2950,1	
877	2999,6	3049,1	3098,6	3148,1	3197,6	3247,1	3296,6	3346,1	3395,6	3445,0	
878	3494,5	3544,0	3593,4	3642,9	3692,3	3741,8	3791,2	3840,6	3890,0	3939,5	
879	3988,9	4038,3	4087,7	4137,1	4186,5	4235,8	4285,2	4334,6	4384,0	4433,5	
880	4482,7	4532,0	4581,4	4630,7	4680,0	4729,4	4778,7	4828,0	4877,3	4926,6	
881	4975,9	5025,2	5074,5	5123,8	5173,0	5222 3	5271,6	5320,8	5370,1	5419,5	50
882	5468,6	5517,8	5567,1	5616,3	5665,5	5714,7	5763,9	5813,1	5862,3	5911,5	
883	5960,7	6009,9	6059,1	6108,2	6157,4	6206,6	6255,7	6304,9	6354,0	6403,1	
884	6452,3	6501,4	6550,5	6599,6	6648,7	6697,8	6746,9	6796,0	6845,1	6894,2	
885	6943,5	6992,3	7041,4	7090,5	7139,5	7188,6	7237,6	7286,6	7335,7	7384,7	
886	7433,7	7482,7	7531,7	7580,7	7629,7	7678,7	7727,7	7776,7	7825,7	7874,7	
887	7923,6	7972,6	8021,5	8070,5	8119,4	8168,4	8217,3	8266,2	8315,1	8364,1	
888	8413,0	8461,9	8510,8	8559,7	8608,5	8657,4	8706,3	8755,2	8804,0	8852,9	
889	8901,8	8950,6	8999,5	9048,3	9097,1	9146,0	9194,8	9243,6	9292,4	9341,2	
890	9390,0	9438,8	9487,6	9536,4	9585,2	9633,9	9682,7	9731,5	9780,2	9829,0	
891	9877,7	9926,4	9975,2	*0023,9	*0072,6	*0121,3	*0170,1	*0218,8	*0267,5	*0316,2	
892	950364,9	0413,5	0462,2	0510,9	0559,6	0608,2	0656,9	0705,5	0754,2	0802,8	
893	0851,5	0900,1	0948,7	0997,3	1045,9	1094,6	1143,2	1191,8	1240,4	1288,9	
894	1337,5	1386,1	1434,7	1483,2	1531,8	1580,3	1628,9	1677,4	1726,0	1774,5	
895	1823,0	1871,6	1920,1	1968,6	2017,1	2065,6	2114,1	2162,6	2211,1	2259,5	
896	2308,0	2356,5	2404,9	2453,4	2501,8	2550,3	2598,7	2647,2	2695,6	2744,0	49
897	2792,4	2840,9	2889,3	2937,7	2986,1	3034,5	3082,8	3131,2	3179,6	3228,0	
898	3276,3	3324,7	3373,1	3421,4	3469,7	3518,1	3566,4	3614,7	3663,1	3711,4	
899	3759,7	3808,0	3856,3	3904,6	3952,9	4001,2	4049,4	4097,7	4146,0	4194,3	
900	4242,5	4290,8	4339,0	4387,3	4435,5	4483,7	4531,9	4580,2	4628,4	4676,6	
901	4724,8	4773,0	4821,2	4869,4	4917,6	4965,7	5013,9	5062,1	5110,2	5158,4	
902	5206,5	5254,7	5302,8	5351,0	5399,1	5447,2	5495,3	5543,4	5591,6	5639,7	
903	5687,8	5735,8	5783,9	5832,0	5880,1	5928,2	5976,2	6024,3	6072,3	6120,4	
904	6168,4	6216,5	6264,5	6312,5	6360,6	6408,6	6456,6	6504,6	6552,6	6600,6	
905	6648,6	6696,6	6744,5	6792,5	6840,5	6888,5	6936,4	6984,4	7032,3	7080,3	
906	7128,2	7176,1	7224,1	7272,0	7319,9	7367,8	7415,7	7463,6	7511,5	7559,4	
907	7607,3	7655,2	7703,0	7750,9	7798,8	7846,6	7894,5	7942,3	7990,2	8038,0	
908	8085,8	8133,7	8181,5	8229,3	8277,1	8324,9	8372,7	8420,5	8468,3	8516,1	
909	8563,9	8611,7	8659,4	8707,2	8754,9	8802,7	8850,5	8898,2	8945,9	8993,7	48

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	5	10	15	20	26	31	36	41	46	49	5	10	15	20	25	29	34	39	44
50	5	10	15	20	25	30	35	40	45	48	5	10	14	19	24	29	34	38	43

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
910	959041,4	9089,1	9136,8	9184,5	9232,2	9280,0	9327,6	9375,3	9423,0	9470,7	
911	9518,4	9566,0	9613,7	9661,4	9709,0	9756,7	9804,3	9852,0	9899,6	9947,2	
912	9994,8	⁎0042,5	⁎0090,1	⁎0137,7	⁎0185,3	⁎0232,9	⁎0280,5	⁎0328,1	⁎0375,6	⁎0423,2	
913	960470,8	0518,3	0565,9	0613,5	0661,0	0708,6	0756,1	0803,6	0851,2	0898,7	48
914	0946,2	0993,7	1041,2	1088,7	1136,2	1183,7	1231,2	1278,7	1326,2	1373,6	
915	1421,1	1468,6	1516,0	1563,5	1610,9	1658,3	1705,8	1753,2	1800,6	1848,1	
916	1895,5	1942,9	1990,3	2037,7	2085,1	2132,5	2179,9	2227,2	2274,6	2322,0	
917	2369,3	2416,7	2464,0	2511,4	2558,7	2606,1	2653,4	2700,7	2748,1	2795,4	
918	2842,7	2890,0	2937,3	2984,6	3031,9	3079,2	3126,4	3173,7	3221,0	3268,3	
919	3315,5	3362,8	3410,0	3457,3	3504,5	3551,7	3599,0	3646,2	3693,4	3740,6	
920	3787,8	3835,0	3882,2	3929,4	3976,6	4023,8	4071,0	4118,1	4165,3	4212,5	
921	4259,6	4306,8	4353,9	4401,1	4448,2	4495,3	4542,5	4589,6	4636,7	4683,8	
922	4730,9	4778,0	4825,1	4872,2	4919,3	4966,4	5013,5	5060,5	5107,6	5154,6	
923	5201,7	5248,8	5295,8	5342,8	5389,9	5436,9	5483,9	5530,9	5578,0	5625,0	
924	5672,0	5719,0	5766,0	5813,0	5859,9	5906,9	5953,9	6000,9	6047,8	6094,8	
925	6141,7	6188,7	6235,6	6282,6	6329,5	6376,4	6423,3	6470,3	6517,2	6564,1	
926	6611,0	6657,9	6704,8	6751,7	6798,5	6845,4	6892,3	6939,2	6986,0	7032,9	
927	7079,7	7126,6	7173,4	7220,3	7267,1	7313,9	7360,7	7407,6	7454,4	7501,2	
928	7548,0	7594,8	7641,6	7688,4	7735,1	7781,9	7828,7	7875,4	7922,2	7969,0	
929	8015,7	8062,5	8109,2	8155,9	8202,7	8249,4	8296,1	8342,8	8389,5	8436,2	
930	8482,9	8529,6	8576,3	8623,0	8669,7	8716,4	8763,0	8809,7	8856,4	8903,0	
931	8949,7	8996,3	9043,0	9089,6	9136,2	9182,9	9229,5	9276,1	9322,7	9369,5	
932	9415,9	9462,5	9509,1	9555,7	9602,3	9648,8	9695,4	9742,0	9788,5	9835,1	
933	9881,6	9928,2	9974,7	⁎0021,3	⁎0067,8	⁎0114,3	⁎0160,8	⁎0207,4	⁎0253,9	⁎0300,4	47
934	970346,9	0393,4	0439,9	0486,3	0532,8	0579,3	0625,8	0672,2	0718,7	0765,2	
935	0811,6	0858,1	0904,5	0950,9	0997,4	1043,8	1090,2	1136,6	1183,0	1229,4	
936	1275,8	1322,2	1368,6	1415,0	1461,4	1507,8	1554,2	1600,5	1646,9	1693,2	
937	1739,6	1785,9	1832,3	1878,6	1924,9	1971,3	2017,6	2063,9	2110,2	2156,5	
938	2202,8	2249,1	2295,4	2341,7	2388,0	2434,3	2480,5	2526,8	2573,1	2619,3	
939	2665,6	2711,8	2758,1	2804,3	2850,6	2896,8	2943,0	2989,2	3035,4	3081,6	
940	3127,9	3174,1	3220,2	3266,4	3312,6	3358,8	3405,0	3451,1	3497,3	3543,5	
941	3589,6	3635,8	3681,9	3728,1	3774,2	3820,3	3866,4	3912,6	3958,7	4004,8	
942	4050,9	4097,0	4143,1	4189,2	4235,3	4281,4	4327,4	4373,5	4419,6	4465,6	
943	4511,7	4557,7	4603,8	4649,8	4695,9	4741,9	4787,9	4833,0	4880,0	4926,0	
944	4972,0	5018,0	5064,0	5110,0	5156,0	5202,0	5247,9	5293,9	5339,9	5385,8	
945	5431,8	5477,8	5523,7	5569,7	5615,6	5661,5	5707,5	5753,4	5799,3	5845,2	
946	5891,1	5937,0	5982,9	6028,8	6074,7	6120,6	6166,5	6212,4	6258,2	6304,1	
947	6350,0	6395,8	6441,7	6487,5	6533,4	6579,2	6625,1	6670,9	6716,7	6762,5	
948	6808,3	6854,1	6900,0	6945,8	6991,5	7037,3	7083,1	7128,9	7174,7	7220,4	
949	7266,2	7312,0	7357,7	7403,5	7449,2	7495,0	7540,7	7586,4	7632,2	7677,9	46
950	7723,6	7769,3	7815,0	7860,7	7906,4	7952,1	7997,8	8043,5	8089,2	8134,8	
951	8180,5	8226,2	8271,8	8317,5	8363,1	8408,8	8454,4	8500,1	8545,7	8591,3	
952	8636,9	8682,6	8728,2	8773,8	8819,4	8865,0	8910,6	8956,2	9001,7	9047,3	
953	9092,9	9138,5	9184,0	9229,6	9275,1	9320,7	9366,2	9411,8	9457,3	9502,8	
954	9548,4	9593,9	9639,4	9684,9	9730,4	9775,9	9821,4	9866,9	9912,4	9957,9	
955	980003,4	0048,8	0094,3	0139,8	0185,2	0230,7	0276,1	0321,6	0367,0	0412,5	
956	0457,9	0503,3	0548,7	0594,2	0639,6	0685,0	0730,4	0775,8	0821,2	0866,6	
957	0911,9	0957,3	1002,7	1048,1	1093,4	1138,8	1184,1	1229,5	1274,8	1320,2	
958	1365,5	1410,8	1456,2	1501,5	1546,8	1592,1	1637,4	1682,7	1728,0	1773,3	
959	1818,6	1863,9	1909,2	1954,4	1999,7	2045,0	2090,2	2135,5	2180,7	2226,0	

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
48	5	10	14	19	24	29	34	38	43	46	5	9	14	18	23	28	32	37	41
47	5	9	14	19	24	28	33	38	42										

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
960	982271,2	2316,5	2361,7	2406,9	2452,2	2497,4	2542,6	2587,8	2633,0	2678,2	
961	2723,4	2768,6	2813,8	2858,9	2904,1	2949,3	2994,5	3039,6	3084,8	3129,9	
962	3175,1	3220,2	3265,4	3310,5	3355,6	3400,7	3445,9	3491,0	3536,1	3581,2	
963	3626,3	3671,4	3716,5	3761,6	3806,5	3851,7	3896,8	3941,9	3986,9	4032,0	
964	4077,0	4122,1	4167,1	4212,2	4257,2	4302,2	4347,3	4392,3	4437,3	4482,3	
965	4527,3	4572,3	4617,3	4662,3	4707,3	4752,3	4797,3	4842,2	4887,2	4932,2	
966	4977,1	5022,1	5067,0	5112,0	5156,9	5201,9	5246,8	5291,7	5336,6	5381,6	
967	5426,5	5471,4	5516,3	5561,2	5606,1	5651,0	5695,9	5740,7	5785,6	5830,5	
968	5875,4	5920,2	5965,1	6009,9	6054,8	6099,6	6144,5	6189,3	6234,1	6279,0	
969	6323,8	6368,6	6413,4	6458,2	6503,0	6547,8	6592,6	6637,4	6682,2	6727,0	
970	6771,7	6816,5	6861,3	6906,0	6950,8	6995,5	7040,3	7085,0	7129,8	7174,5	
971	7219,2	7264,0	7308,7	7353,4	7398,1	7442,8	7487,5	7532,2	7576,9	7621,6	
972	7666,3	7710,9	7755,6	7800,3	7845,0	7889,6	7934,3	7978,9	8023,6	8068,2	
973	8112,8	8157,5	8202,1	8246,7	8291,3	8336,0	8380,6	8425,2	8469,8	8514,4	
974	8559,0	8603,5	8648,1	8692,7	8737,3	8781,8	8826,4	8871,0	8915,5	8960,1	
975	9004,6	9049,2	9093,7	9138,2	9182,8	9227,3	9271,8	9316,3	9360,8	9405,3	
976	9449,8	9494,3	9538,8	9583,3	9627,8	9672,2	9716,7	9761,2	9805,7	9850,1	
977	9894,6	9939,0	9983,5	☼0027,9	☼0072,5	☼0116,8	☼0161,2	☼0205,6	☼0250,0	☼0294,4	
978	990338,9	0383,3	0427,7	0472,1	0516,4	0560,8	0605,2	0649,6	0694,0	0738,3	45
979	0782,7	0827,1	0871,4	0915,8	0960,1	1004,4	1048,8	1093,1	1137,4	1181,8	
980	1226,1	1270,4	1314,7	1359,0	1403,3	1447,6	1491,9	1536,2	1580,5	1624,7	
981	1669,0	1713,3	1757,5	1801,8	1846,1	1890,5	1934,5	1978,8	2023,0	2067,3	
982	2111,5	2155,7	2199,9	2244,1	2288,4	2332,6	2376,8	2421,0	2465,1	2509,3	
983	2553,5	2597,7	2641,9	2686,0	2730,2	2774,4	2818,5	2862,7	2906,8	2951,0	
984	2995,1	3039,2	3083,4	3127,5	3171,6	3215,7	3259,8	3303,9	3348,0	3392,1	
985	3436,2	3480,3	3524,4	3568,5	3612,6	3656,6	3700,7	3744,8	3788,8	3832,9	
986	3876,9	3921,0	3965,0	4009,0	4053,1	4097,1	4141,1	4185,1	4229,1	4273,1	
987	4317,2	4361,2	4405,1	4449,1	4493,1	4537,1	4581,1	4625,1	4669,0	4713,0	
988	4756,9	4800,9	4844,8	4888,8	4932,7	4976,7	5020,6	5064,5	5108,5	5152,4	
989	5196,3	5240,2	5284,1	5328,0	5371,9	5415,8	5459,7	5503,6	5547,4	5591,3	
990	5635,2	5679,1	5722,9	5766,8	5810,6	5854,5	5898,3	5942,2	5986,0	6029,8	
991	6073,7	6117,5	6161,3	6205,1	6248,9	6292,7	6336,5	6380,3	6424,1	6467,9	
992	6511,7	6555,4	6599,2	6643,0	6686,8	6730,5	6774,3	6818,0	6861,8	6905,5	
993	6949,2	6993,0	7036,7	7080,4	7124,2	7167,9	7211,6	7255,3	7299,0	7342,7	
994	7386,4	7430,1	7473,8	7517,4	7561,1	7604,8	7648,5	7692,1	7735,8	7779,4	
995	7823,1	7866,7	7910,4	7954,0	7997,6	8041,3	8084,9	8128,5	8172,1	8215,7	
996	8259,3	8302,9	8346,5	8390,1	8433,7	8477,3	8520,9	8564,5	8608,0	8651,6	
997	8695,2	8738,7	8782,3	8825,8	8869,4	8912,9	8956,4	9000,0	9043,5	9087,0	44
998	9130,5	9174,1	9217,6	9261,1	9304,6	9348,1	9391,6	9435,0	9478,5	9522,0	
999	9565,5	9609,0	9652,4	9695,9	9739,3	9782,8	9826,2	9869,7	9913,1	9956,6	43

Die Differenzen und entsprechenden Proportionaltheile.

D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	5	9	14	18	23	27	32	36	41	43	4	9	13	17	22	26	30	34	39
44	4	9	13	18	22	26	31	35	40										

Das

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Minsinger, Franz

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit einer Logarithmentafel und mehreren metrologischen Tabellen über die Masse, Gewichte u. Münzen verschiedener Länder

Augsburg 1832

Math.p. 359 n
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082427-7